Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

Part I

SERIES E INTEGRALES DE FOURIER

(Edición de ejemplar de prueba)

1 Introducción

Para problemas con condiciones de frontera periódicas en el intervalo $-L \leq x \leq L$, nos preguntamos si la siguiente serie infinita (conocida como serie de Fourier de $f(x)$), tiene sentido:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)) \qquad (1.1.1)$$

Obviando la igualdad, vale preguntarse ¿Converge esta serie infinita?,¿qué condiciones debe cumplir f para que se dé la convergencia?,¿Converge a $f(x)$?

Estas preguntas no tienen una respuesta sencilla. Sin embargo, las series de Fourier normalmente funcionan bastante bien.

La expresión comentada será válida para algunos tipos de funciones y se necesitarán pequeñas modificaciones para otros tipos de ellas. Partiremos siendo positivos suponiendo que la expresión mencionada es cierta. ¿Qué nos dice ésta sobre los valores de los coeficientes a_n y b_n?. Necesitaremos del siguiente lema.

1.1 Lema Elemental

i) Si m y n son números enteros no negativos distintos entonces:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (1.1.2)$$

ii) Para cualquier par de enteros no negativos m y n:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \; (1.1.3)$$

$iii)$Para cualquier entero positivo n,

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L \ (1.1.4)$$

Demostración: Se prueba integrando directamente:
i)

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\frac{L}{(n+m)\pi}\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)|_{-L}^{L} \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{L}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)|_{-L}^{L} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además, *si* $m = 0$ y $n \neq 0$ es facilmente verificable que la integral es cero.

En forma similar se prueba que

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

ii)

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= -,\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{L}{(n+m)\pi}\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)|_{-L}^{L} \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{L}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)|_{-L}^{L} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Estas formulas relativas a estas integrales se les llama **relaciones de ortogonalida**d y diremos en tal caso que el conjunto de las funciones $\left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\}$ $\forall n = 0, 1, 2, ...,$ y $\forall$ $m = 1, 2, ...,$son ortogonales en $[-L, L]$
$iii)$ Demostración queda como ejercicio para el lector. Debe calcular estas integrales.En síntesis, se puede puntualizar que:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \left\{\begin{smallmatrix} 0, & si\ m\neq n \\ 1, & si\ m=n \end{smallmatrix}\right\} = \delta_{m,n}$$

$\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \left\{\begin{smallmatrix}0, & si\ m\neq n\\ 1, & si\ m=n\end{smallmatrix}\right\} = \delta_{m,n}$

$\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \forall m,n$

$\int\limits_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \forall m,n$ y $\int\limits_{-L}^{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \forall m,n$

2 La serie de Fourier de una función

Se debe distinguir entre $f(x)$ y su serie de Fourier en el intervalo $-L \leq x \leq L$:

Serie de Fourier de $f(x)$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right))$$

La serie trigonométrica puede incluso no converger y si converge, puede que no lo haga a $f(x)$. Partiendo del supuesto que la serie converge podríamos determinar los coeficientes de Fourier a_0, a_n, b_n. usando las relaciones de ortogonalidad.

Lo que queremos es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)) \qquad (1.1.1)$$

Integrando la identidad (1.1.1) se tiene:

$$\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx = \int\limits_{-L}^{L} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int\limits_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int\limits_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx)$$

Como todas las integrales de la derecha valen cero, excepto la primera, se deduce de aquí el valor de a_0,así.

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx$$

Para el calculo de a_n multiplicamos la identidad (1.1.1) por $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e integrando término a término tenemos.

$$\begin{aligned}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx &= a_0\int\limits_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx + \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int\limits_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx + b_n\int\limits_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx\right] \\ &= 0 + L\delta_{n,k} + 0\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = a_k L$$

así el valor de a_k es

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx. \quad \forall\ k \geq 1$$

Ahora multiplicando (1.1.1) por $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e integrando de manera similar y por el lema se tiene

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Hemos "encontrado" los coeficientes a_0, a_n, b_n claro eso si bajo muchos supuestos. Estos cálculos sugieren la siguiente definición.

2.1 Coeficientes de Fourier

Definición .-
$i)$ Sea f una función Riemann integrable en $[-L, L]$, los coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad para n = 1, 2, 3... \qquad (1.2.1) \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad para n = 1, 2, 3... \end{aligned}$$

relacionados con f en $[-L, L]$ se denominan coeficientes de Fourier.

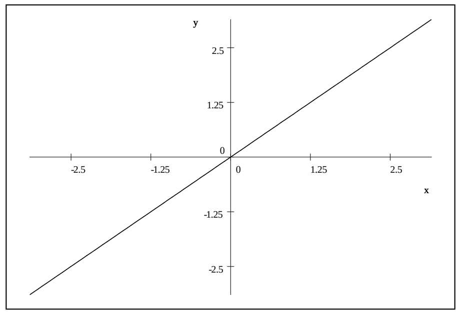
$ii)$ La serie de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$ se define como la serie donde los coeficientes están dados por (1.2.1). Para no hablar de convergencia todavía, escribimos:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Donde el signo"$\sim$" significa sólo que a la derecha se tiene la serie de Fourier de $f(x)$ (en el intervalo $-L \leq x \leq L$).

Ejemplo 1: Determinar la serie de Fourier de $f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi]$

Solución: Determinemos la gráfica de la función



Determinemos los coeficientes de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = \left[\frac{1}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{x}{n\pi} \sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

Luego, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx)$

2.2 Atributos de la función

Lo anteriormente expuesto es válido para cierto tipo de funciones, nos referimos a las funciones $f(x)$ que son seccionalmente continuas.

Definición 1.- Sea $f(x)$ definida en $[a, b]$. Entonces f es seccionalmente continua en $[a, b]$ si:

a) f es continua en $[a, b]$,excepto quizás en un número finito de puntos.

b) Ambos $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existen y son finitos.

c) f no es continua en x_0, $x_0 \in (a, b)$ y los límites $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existen y son finitos .

Definición 2.- $f(x)$ es seccionalmente **suave** en $[a, b]$ si f y f' son seccionalmente continuas en $[a, b]$.

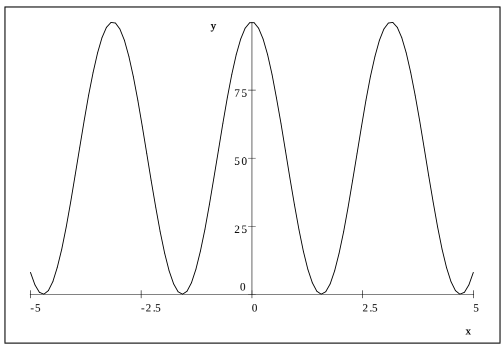
Ejemplo 2: Muestre que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ no es seccionalmente **suave** en ningún intervalo cerrado que contenga en su interior al cero.

Solución: En efecto, se tiene que $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \implies \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \infty$, no existe. Luego, la función no es seccionalmente suave.

Observación:

Cada función seno y coseno que aparece en el desarrollo de la serie de Fourier tienen períodos diferentes el que es igual a $\frac{2L}{n}$ para $n \geq 1$.Por otra parte, un múltiplo entero del período de una función períodica es también un período , podemos afirmar entonces que $2L$ es período común para las funciones seno y coseno del desarrollo de la serie. Por lo anterior, la serie de Fourier no sólo representa a $f(x)$ en el intervalo $-L \leq x \leq L$, sino que, proporciona una extensión períodica de f en todos los reales.

Ejemplo 3: Encontrar el período de la función $f(x) = 100\cos^2 x$.



Solución: Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ se tiene

$$f(x) = (10\cos x)^2 = 100\cos^2 x = 100\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

entonces

$$f(x) = 50 + 50\cos 2x$$

como el periódo de $\cos 2x$ es π y una constante tiene cualquier período, $f(x)$ es de período π.

2.3 Convergencia de las series de Fourier

Teorema

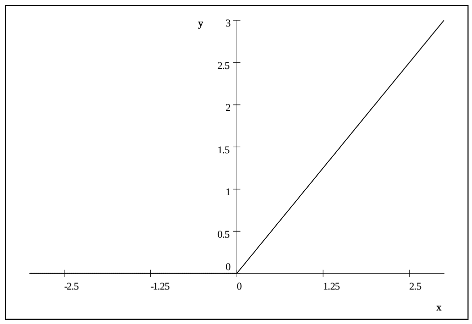
Si $f(x)$ es seccionalmente **suave** en el intervalo $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge.

i) A la extensión períodica de $f(x)$, en los puntos que la extensión períodica sea continua.

ii) Al promedio de los límites laterales $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ en los puntos donde la extensión períodica tenga una discontinuidad de salto.

Ejemplo 4: Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -3 \leq x \leq 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ .Construir la serie de Fourier y analizar la convergencia en todo IR

Solución: Determinemos la gráfica de la función



Calculemos los coeficientes de la correspondiente serie de Fourier de $f(x)$:

$a_0 = \frac{1}{6}\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{3} xdx = \frac{3}{4}$

$a_n = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$

$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{3} x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{9\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{3x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{n\pi}\right]_0^3 = \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$

$b_n = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$

$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{3} x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{9\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{3x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{n\pi}\right]_0^3 = -\frac{3}{n\pi}\cos(n\pi)$

la serie de Fourier la podemos escribir

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]$$

Tenemos que f es continua en $[-3,3]$,por lo tanto su extensión periódica es seccionalmente continua en $\mathbb{R}$, con discontinuidad de salto en los puntos $x = 3 \pm 6n, \ \ n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, de acuerdo al teorema la serie converge a

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 3 \pm 6n \\ \frac{3}{2} & si \quad x = 3 \pm 6n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

entonces

$$f_E(x) = \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) - \frac{\pi}{n}(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]$$

es decir

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right) + \frac{\pi}{n}(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]$$

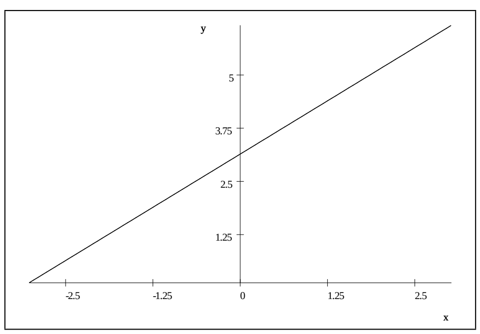
Al estudiar la convergencia en $x_0 = 3$ punto de discontinuidad de la función

se obtiene

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)(-1)^n\right] \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ejemplo 5 Sea $f(x) = x + \pi,\ x \in [-\pi, \pi]$. Determine la serie de Fourier y obtener la gráfica de sumas parciales.

Solución : La gráfica de la función es



Determinemos los coeficientes de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi^2\right) = \pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{x}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}sen(nx) - \frac{x}{n}\cos s(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

Así la serie de Fourier de $f(x)$ es

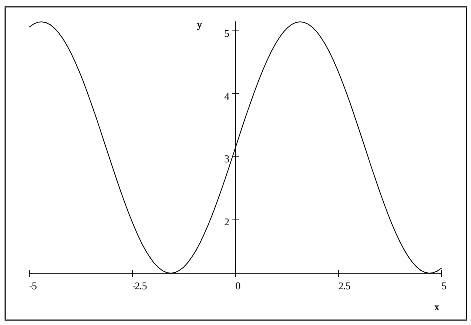
$$\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sennx=\pi+2\left(senx-\frac{sen2x}{2}+\frac{sen3x}{3}-\cdots\right)$$

Para visualizar la convergencia de está serie gráfiquemos algunas de sus sumas parciales

$$S_n(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}senkx$$

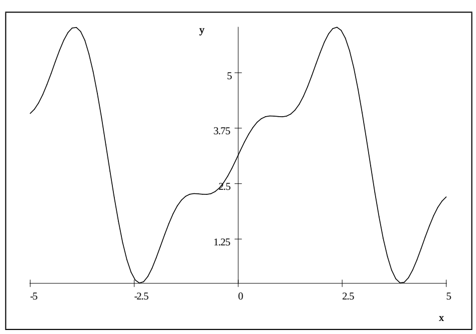
Obtengamos S_1 :

$S_1(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$



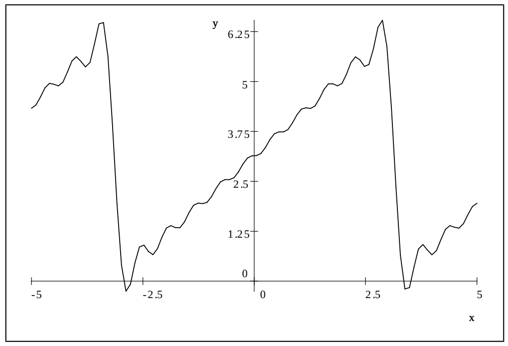
Obtengamos S_3

$S_3(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$



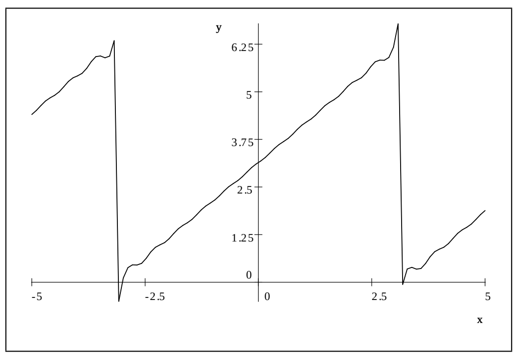
Obtengamos S_{10}

$S_{10}(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$



Finalmente, obtengamos S_{50}

$$S_{10}\left(x\right)=\pi+2\sum_{k=1}^{50}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$



Podemos visualizar que en la medida que es mayor el número de términos de las sumas parciales estas convergen a la gráfica de la función

2.4 La integral de funciones pares e impares

2.4.1 Lema (De funciones pares e impares)

Sea f una función integrable en $[-L,L]$.

a) Si f una función par en $[-L,L]$, entonces $\int\limits_{-L}^{L}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{L}f(x)dx$

b) Si f es función impar en $[-L,L]$, entonces $\int\limits_{-L}^{L}f(x)dx=0$

Demostración

a) f función par, entonces $f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.Considerando que f es par y el cambio de variable $t=-x$ se tiene

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{L} f(t)dt = \int_{0}^{L} f(x)dx$$

entonces

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

b) f función impar, entonces $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.Usando este hecho se tiene.

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{L}^{0} -f(-x)dx = \int_{L}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{L} f(x)dx$$

entonces

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(x)dx - \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$$

lo que demuestra el lema.

2.5 Teorema de las funciones pares y de las impares

Sea f una función integrable en $[-L, L]$,

a) Si f es par, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ es

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde $a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$ y $a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$. Esta se denomina serie de cosenos

b) Si f es impar, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ es

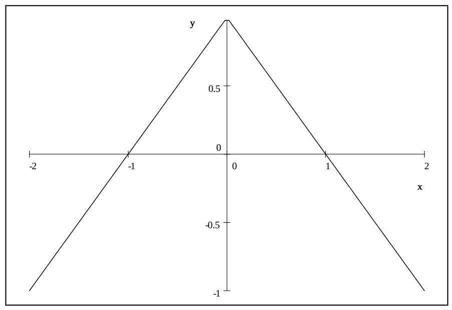
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$.Esta se denomina serie de senos

Demostración: Se deja al lector, debe aplicar el Lema 1.3.1 en el cálculo de los coeficientes de Fourier

Ejemplo 6: Calcule la serie de Fourier de $f(x) = 1 - |x|$ en $-2 \leq x \leq 2$.

Solución: A partir de la gráfica de la función podemos inferir que la función es par



Es decir $f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, luego se tiene que f es par.

Obtengamos los coeficientes del desarrollo de Fourier

$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (1-x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)|_0^2 = 0$

$a_n = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int\limits_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \int\limits_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$

$a_n = 0 - \left[\frac{4\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{2x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\right]_0^2$, por consiguiente

$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} & \text{si n es impar} \end{cases}$

Asi la serie de Fourier de $f(x) = 1 - |x|$ es

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

En muchos problemas se tiene la posibilidad de trabajar con series de senos o series de cosenos. Por ejemplo , al resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden aplicando el método de separación de variables.

3 Desarrollos llamados de medio rango

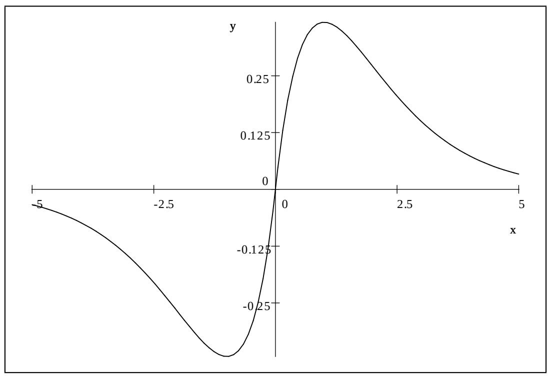
Sea una función f seccionalmente continua que está definida sólo en un intervalo $[0, L]$ y se desea desarrollar en serie de Fourier $\forall x \in [0, L]$. Una forma de hacer lo anterior es extender f al intervalo $[-L, L]$ y por supuesto , puede ser hecho de muchas maneras, sin embargo, dos extensiones son las más convenientes e importantes. Construir una **extensión impar** lo que origina una serie de senos o construir un **extensión par** lo que determina una serie de cosenos. Estas se denominan desarrollos de medio rango.

3.1 Extensión impar:

Supongamos que conocemos $f(x)$ solamente para $0 \leq x \leq L$, entonces podemos extenderla como una función impar. obteniendo otra función denotada $f_i(x)$ y definida por:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), \ 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), \ -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

como se muestra en la figura adjunta.



Si $f(x)$ es seccionalmente suave en $0 \leq x \leq L$, entonces $f_i(x)$ es también seccionamente suave y se puede aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier.

La serie de Fourier de $f_i(x)$ es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L$$

Como nosotros estamos interesados solamente en lo que ocurre entre $0 \leq x \leq L$.En esa región $f(x)$ es identica a $f_i(x)$ y la serie de Fourier es

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ 0 \leq x \leq L \\ \text{con coficiente } b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Sea la función $f(x) = x$ en el interior $0 \leq x \leq L$. Obtener el desarrollo de medio rango considerando una extensión impar.

Solución. La discontinuidad de salto de la función $f_i(x) = \begin{cases} x, \ 0 \leq x \leq L \\ x, \ -L \leq x \leq 0 \end{cases}$,extensión impar periódica ,muestra que la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$ converge a cero en $x = L$ aunque $f(L) \neq 0$ y converge a $f(x)$ en $0 \leq x < L$.Ádemas

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

Por lo tanto, la serie resultante es:

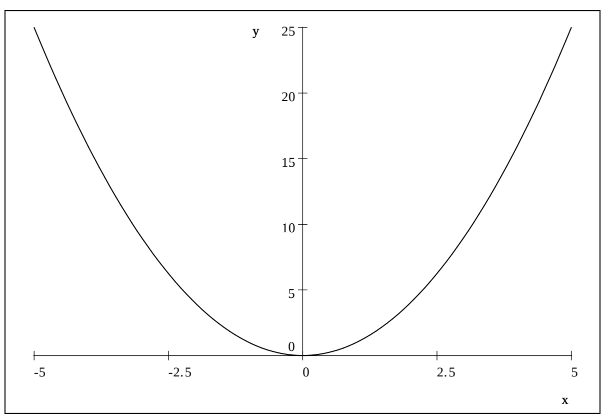
$$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x < L$$

3.2 Extensión par

Supongamos ahora que conocemos $f(x)$ solamente para $0 \leq x \leq L$, entonces la extendemos como función par obteniendo otra función denotada $f_p(x)$ definida por:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), \ 0 \leq x \leq L \\ f(-x), \ -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

como muestra la figura adjunta:



Si $f(x)$ es seccionalmente continua en $0 \leq x \leq L$, entonces su extensión par $f_p(x)$ lo será también por lo que se puede aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier.

En el intervalo $0 \leq x \leq L$, la función $f(x)$ es idéntica a su extensión par. La serie que se obtiene se denomina serie de Fourier de Cosenos de $f(x)$.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \le x \le L, \text{ con coeficientes}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \;\; y \;\; a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Ejemplo 8: Construir la serie de Fourier de Cosenos de $f(x) = x$ en $0 \le x \le L$.

Solución: Por las características de la extensión en lo que concierne a la continuidad de la función tenemos:

$$\begin{aligned}
x &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \le x \le L \\
a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{1}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L}{2} \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
a_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par.} \\ -\frac{4L}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalmente, la serie de Fourier coseno de $f(x) = x$ en $0 \le x \le L$ es:

$$\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$$

4 Diferenciacion e Integración de la series de Fourier

4.1 Derivación

Las series infinitas, aun las convergentes no siempre se pueden derivar término a término. Un caso ilustrativo, es el de la función $f(x) = x$ definida para $-\pi \le x \le \pi$, cuya serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

que converge para $-\pi < x < \pi$, es decir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad \text{para } -\pi < x < \pi$$

Si diferenciamos, esta serie término a término tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos(nx)$$

la cual es una serie que no converge en $]-\pi, \pi[$, ya que si $a_n = 2(-1)^{n+1} \cos(nx)$ para cada $x \in]-\pi, \pi[$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ no existe, como no ocurre que $a_n \longrightarrow 0$,concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos(nx)$ no converge para cada $x \in]-\pi, \pi[$.

Por otro lado, $f'(x) = 1 \quad \forall x \in]-\pi, \pi[$. Esto muestra en este caso que la derivada término a término de la serie, no converge a la derivada de la función a la que representa.

La dificultad se nos presenta cada vez que la serie de Fourier de $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto, la derivación término a término no está justificada en estos casos. Sin embargo, podemos aquí considerar la siguiente proposición que agrega condiciones para permitir la derivación término a término.

Proposición:

Sea f una función continua en $[-L, L]$ con $f(-L) = f(L)$, si f' es seccionalmente suave en $[-L, L]$ donde $f''(x)$ existe se tiene.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left[-a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Demostración.- Se deja al lector, se sugiere escribir la serie de Fourier de $f'(x)$, considerando que esta serie converge a $f'(x)$ siempre que $f''(x)$ exista. Use integración por partes para relacionar los coeficientes de $f'(x)$ con los correspondientes de $f(x)$.

Ejemplo 9. Considere la función $f(x) = x^2$ en $-\pi \leq x \leq \pi$ y verifique si la derivada de esta serie existe.

Solución Claramente se satisface las hipótesis de la proposición anterior. La serie de Fourier de la función $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$ es:

(Ver Problema 2 en problemas resueltos)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Como $f'(x) = 2x$ es continua, y existe $f''(x) = 2$ en todo el intervalo, entonces para $-\pi < x < \pi$

$$f'(x) = 2x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Note que este resultado concuerda con lo establecido en el ejemplo 1 del inciso 2.1.

4.2 Integración

La precaucion que se tiene para la derivación término a término de la serie de Fourier no se requiere para el caso de la integración .

Proposición

Sea f una función seccionalmente suave en $[-L, L]$ con serie de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

Entonces para cada $x \in [-L, L]$.

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - (-1)^n \right) \right]$$

Demostración;

Sea $F(x) = \int\limits_{-L}^{x} f(t)dt - a_0 x \quad \forall x \in [-L, L]$ así definida F es continua en $[-L, L]$ además $F(-L) = \int\limits_{-L}^{-L} f(t)dt - a_0 (-L) = a_0 L \quad y \quad F(L) = \int\limits_{-L}^{L} f(t)dt - a_0 L = 2a_0 L - a_0 L = a_0 L$

Por lo cual $F(-L) = F(L)$, asimismo $F'(x) = f(x) - a_0 \ \forall x \in [-L, L]$ donde f es continua. Entonces podemos asegurar que F' es seccionalmente continua en $[-L, L]$ y por el teorema de convergencia tenemos que

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

donde para $n \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \ \text{ integrando por partes.} \\
&= \frac{1}{L}F(t)\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} F'(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= 0 - \frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L}(f(t)-a_0)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt. \\
&= -\frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt + \frac{L}{n\pi}a_0\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt. \\
A_n &= -\frac{L}{n\pi}b_n
\end{aligned}
$$

donde b_n es el coeficiente correspondiente de la serie de Fourier de f en $[-L, L]$.

De manera analoga se tiene que:

$$
B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{L}{n\pi}a_n
$$

donde a_n es también el correspondiente coeficiente de la serie de Fourier de f en $[-L, L]$.

Por lo tanto, reemplazando en (1)

$$
F(x) = A_0 + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[-b_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \quad x \in [-L, L]
$$

para A_0 tenemos:

$$
F(L) = a_0 L = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi) \implies A_0 = a_0 L - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi)
$$

finalmente

$$
A_0 = a_0 L + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}b_n\cos(n\pi)
$$

ahora sustituyendo A_0 se tiene

$$F(x) = a_0 L + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} b_n \cos(n\pi) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[-b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

y reemplazando en la igualdad inicial obtenemos lo que afirma el teorema.

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - (-1)^n\right)\right]$$

4.3 Identidad de Parseval

Sea f una función seccionalmente continua en $[-L, L]$ y tal que f' es también seccionalmente continua en $[-L, L]$.

Si

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

es la serie de Fourier de f, entonces

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\, dx = 2\,(a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right]$$

que se conoce como identidad de Parseval

Prueba: La serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para cada x del intervalo $[-L, L]$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Multiplicando por $f(x)$ se tiene

$$f(x)^2 = a_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

podemos integrar término a término.

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\, dx = a_0\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

de aquí recordando lo que son los coeficientes de una serie de Fourier se tiene.

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\, dx = 2\,(a_0)^2 L + L\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot a_n + b_n \cdot b_n\right] \implies$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx = 2\,(a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right]$$

Ejemplo10. Sea $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$, periódica de período 2π. Pruebe que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solución: Como f(x) en es una función impar se tiene que : $a_n = 0 \;\; para \quad n = 0, 1, 2, ...y$

$$\begin{aligned} b_n \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(n\pi)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(n\pi)\,dx = -\left[\frac{2x\cos(nx)}{n\pi}\right]_0^{\pi} \\ \Longrightarrow \quad & b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & n = 1, 3, 5, ... \\ -\frac{2}{n} & n = 2, 4, 6, ... \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\sin(nx)}{n} = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}...\right]$$

Aplicando la identidad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 4\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...\right] \quad \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{4\pi}\,\frac{x^3}{3}|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

5 Integral de Fourier

Las series de Fourier son una herramienta poderosa para tratar problemas relacionados con funciones períodicas. Luego, es conveniente generalizar este método parar incluir funciones no períodicas.

Definición.- Si $f(x)$ definida en $(-\infty, \infty)$ es seccionalmente continua en cada intervalo finito y tiene derivadas por la derecha e izquierda en todo punto y tal que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge, entonces la integral de Fourier de f se define como:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\, dw$$

donde:

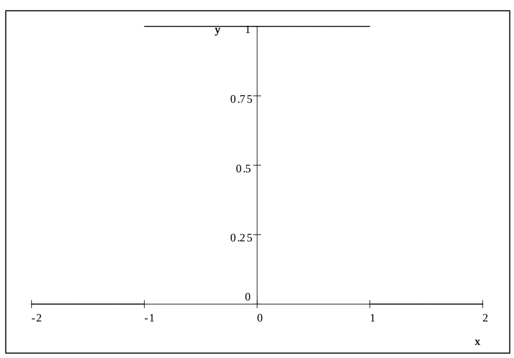
$$\begin{aligned} A(w) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt dt \\ B(w) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt dt \end{aligned}$$

$A(w)$ y $B(w)$ se llaman los coefcientes de la integral de Fourier de $f(x)$.

Ejemplo 11. Encontrar la representación por medio de la integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| < 1 \\ 0 & , \ |x| > 1 \end{cases}$$

Solución: Primeramente, determinemos la gráfica de la función



Ahora, calculemos los coeficientes de la Integral de Fourier

$A(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos wu du = \int\limits_{-1}^{1} \cos wu du = \left[\frac{\sin wu}{w}\right]\Big|_{-1}^{1} = 2\frac{\sin w}{w}$

$B(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin wu du = \int\limits_{-1}^{1} \sin wu du = 0$

Por lo tanto, la integral de Fourier de $f(x)$ es:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{2}{w}\sin w \cos wx\right] dw$$

5.1 Criterio de convergencia de la integral de Fourier

Si $f(x)$ es seccionalmente continua en $[-L, L]$ $\forall$ $L > 0$ y tal que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ existe, entonces la integral de Fourier converge a $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ (Promedio de los límites izquierdo y derecho de $f(x)$), $\forall$ x donde $f\prime(x^+)$ y $f\prime(x^-)$ existen.

Ejemplo 12. Estudie la convergencia de la Integral de Fourier del ejemplo 11

Solución Sea $f(x)$ definida en ejemplo 11, debido a que $f(x)$ es seccionalmente suave, la integral de Fourier de $f(x)$ converge a $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ $\forall$ x. De acuerdo con el criterio de convergencia se tiene:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{\sin w}{w}\cos wx\right] dw = \begin{cases} 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = \pm 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

En particular, una situación interesante se da cuando $x = 0$.

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{\sin w}{w}\cos wx\right] dw = 1 \Longrightarrow \int\limits_0^{\infty}\left[\frac{\sin w}{w}\cos wx\right] dw = \frac{\pi}{2}$$

5.2 Integrales de Fourier de cosenos y senos

Sea $f(x)$ una función definida en $[0, \infty)$, podemos extender esta función a una función par o impar en $(-\infty, \infty)$ y calcular la integral de Fourier de esta ultima, que resulta ser de coseno y seno respectivamente, lo cual es completamente análoga a los desarrollos en cósenos y senos de una función definida en un intervalo $[0, L]$ para el caso de las series de Fourier.

Definición: Sea f definida en $[0, \infty)$ y sea $\int\limits_0^{\infty} |f(u)|\, du$ convergente, la integral de Fourier en cósenos de f es

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} A(w)\cos(wx)dw, \text{ donde } A(w) = 2\int\limits_0^{\infty} f(u)\cos(wu)du$$

Y la integral de Fourier en senos de f es

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} B(w)\sin(wx)dw, \text{ donde } B(w) = 2\int\limits_0^{\infty} f(u)\sin(wu)du$$

En lo que tiene que ver con la convergencia de la integral de Fourier en este caso, si f es seccionalmente suave en todo intervalo $[0, \infty]$, entonces esta integral converge a $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ en $(0, \infty)$.

Ejemplo 13: Encontrar la integral de Fourier de $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & si \quad x > 10 \end{cases}$,

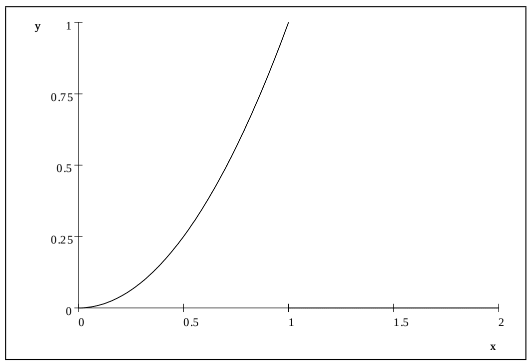
si:

a) se considera una extension par de $f(x)$

b)) se considera una extension impar de $f(x)$; y luego

c) en ambos casos, determinar las convergencias de estas integrales .

Solución: Consideremos la gráfica de la función



a) Para obtener la integral de Fourier de cosenos, extendemos f como una función par f_P definida en toda la recta real, luego:

$$\begin{aligned} A(w) &= 2\int_0^\infty f(u)\cos(wu)du = 2\int_0^{10} u^2\cos(wu)du \\ &= 2\left[\frac{u^2}{w}\sin(wu)\Big|_0^{10} - \frac{2}{w}\int_0^{10} u\sin(wu)du\right] \\ &= 2\left[\frac{u^2}{w}\sin(wu) - \frac{2}{w}\left(\frac{1}{w^2}\sin(wu) - \frac{u}{w}\cos(wu)\right)\right]_0^{10} \\ &= \left(\frac{200}{w} - \frac{4}{w^3}\right)\sin 10w + \frac{40}{w^2}\cos 10w \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral de Fourier de cosenos es:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{200}{w} - \frac{4}{w^3}\right)\sin 10w + \frac{40}{w^2}\cos 10w\right]\cos wxdw$$

Al aplicar criterio de convergencia obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\frac{200}{w}-\frac{4}{w^3}\right)\sin 10w+\frac{40}{w^2}\cos 10w\right]\cos wx dw=\begin{cases} x^2 & si \quad 0<x<10 \\ 0 & si \quad x>10 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 50 & si \quad x=10 \end{cases}$$

b) Para obtener la integral de Fourier de senos, extendemos f como una función impar f_I definida en toda la recta real.

$$\begin{aligned} B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt dt = 2\int_{0}^{10} u^2 \sin wu du \\ &= 2\left[-\frac{u^2}{w}\cos wu\Big|_0^{10}+\frac{2}{w}\int_0^{10} u\cos wu du\right] \\ &= 2\left[-\frac{u^2}{w}\cos wu+\frac{2}{w}\left(\frac{1}{w^2}\cos wu+\frac{u}{w}\sin wu\right)\right]_0^{10} \\ &= 2\left[-\frac{10^2}{w}\cos 10w+\frac{2}{w^3}\cos 10w+\frac{20}{w^2}\sin 10w-\frac{2}{w^3}\right] \end{aligned}$$

entonces la integral de Fourier de senos es:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(-\frac{200}{w}+\frac{4}{w^3}\right)\cos 10w+\frac{40}{w^2}\sin 10w-\frac{4}{w^3}\right]\sin wx dw$$

Finalmente, al aplicar criterio de convergencia obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(-\frac{200}{w}+\frac{4}{w^3}\right)\cos 10w+\frac{40}{w^2}\sin 10w-\frac{4}{w^3}\right]\sin wx dw=\begin{cases} x^2 & si \quad 0<x<10 \\ 0 & si \quad x>10 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 50 & si \quad x=10 \end{cases}$$