TEMA III: FUNCIONES DE BESSEL

1. Las funciones de Bessel de orden natural

La ecuación diferencial de Bessel de orden ν, viene representada por

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$$

o bien

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $\nu \in \mathbb{R}$ (podría ser $x, \nu \in \mathbb{C}$)

Comenzaremos estudiando una solución de la ecuación de Bessel para $\nu \in \mathbb{N}$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \ , \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{1.1}$$

La función $J_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}$ es solución de la ecuación (1.1). Además como

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}(\frac{x}{2})^{n+2k+2}}{(k+1)!(n+k+1)!}}{\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(\frac{x}{2})^2}{(k+1)(n+k+1)} = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

la serie que define a $J_n(x)$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Veamos que efectivamente $J_n(x)$ es solución de (1.1).

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+2k} \quad \textit{siendo} \;\; \alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k}k!(n+k)!}$$

$$J_n'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k)\alpha_k x^{n+2k-1} \;\; y \;\; J_n''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+2k)(n+2k-1)\alpha_k x^{n+2k-2}$$

por lo que

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(n+2k)(n+2k-1) + (n+2k) - n^2\Big] \alpha_k x^{n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+2k+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(n+2k)^2 - n^2\Big] \alpha_k x^{n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+2k+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(n+2k+n)(n+2k-n)\right] \alpha_k x^{n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+2k+2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 4k(n+k)\alpha_k x^{n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{n+2k+2} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} 4(r+1)(n+r+1)\alpha_{r+1} x^{n+2r+2} + \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{n+2r+2} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[4(r+1)(n+r+1)\alpha_{r+1} + \alpha_r\right] x^{n+2r+2} = 0$$

Si tomamos en la expresión de $J_n(x)$ los valores $n = 0$ y $n = 1$, obtendremos las funciones de Bessel de orden cero y uno respectivamente:

$$J_0(x) = 1 - \frac{(\frac{x}{2})^2}{(1!)^2} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{(2!)^2} - \frac{(\frac{x}{2})^6}{(3!)^2} + \ldots\ldots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 - \frac{(\frac{x}{2})^2}{1!2!} + \frac{(\frac{x}{2})^4}{2!3!} - \frac{(\frac{x}{2})^6}{3!4!} + \ldots\ldots\right]$$

Estas funciones tienen la particularidad de que el resto de las funciones $J_n(x)$ con $(n = 2, 3, 4, \ldots.)$ pueden expresarse en términos de ellas dos.

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{n+2k}k!(k+n)!} x^{2n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2n+2k)}{2^{n+2k}k!(k+n)!} x^{2n+2k-1} =$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{n-1+2k}k!(k+n-1)!} x^{n-1+2k} = x^n J_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{n+2k}k!(k+n)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{n+2k}k!(k+n)!} x^{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{n-1+2k}(k-1)!(k+n)!} x^{2k-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{2^{n+1+2r}r!(r+n+1)!} x^{2r+1} =$$

$$= -x^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{n+1+2r}r!(r+n+1)!} x^{n+1+2r} = -x^{-n} J_{n+1}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Luego hemos obtenido las relaciones

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.3}$$

Si efectuamos la derivación en (1.2) y dividimos por x^n

$$J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) \tag{1.4}$$

Con el mismo proceso, pero dividiendo por x^{-n}, en (1.3)

$$J_n'(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x) \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5) se deducen las siguientes relaciones recursivas para las funciones de Bessel de orden natural.

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \tfrac{2n}{x} J_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \\ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= 2J_n'(x) \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \end{aligned} \tag{1.6}$$

para el caso $n = 0$ la segunda ecuación se reemplaza por

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

2. Funciones de Bessel de primera especie y orden arbitrario

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$J_\nu(x) \equiv$ función de Bessel de primera especie y orden ν $(x, \nu \in \mathbb{R})$.

Ejercicio: Comprobar que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones de la ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$.

Nota: La solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ viene dada por

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes de la ecuación.

En el caso de la ecuación diferencial de Bessel, no es complicado comprobar que las soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes siempre que $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, sin embargo para $n = 1, 2, 3, ...$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{-n+2k}}{k!(k-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (\frac{x}{2})^{n+2s}}{(n+s)!s!} = (-1)^n J_n(x)$$

por lo que para $\nu = n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ no son linealmente idenpedientes. Este hecho motiva la búsqueda de otras soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que sean linealmente independientes con $J_\nu(x)$ incluso cuando $\nu = n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios: Comprobar la veracidad de las siguientes igualdades

1. $\dfrac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$
2. $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$
3. $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x)$
4. $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$
5. $\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^m \left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x)$
6. $\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^m \left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = (-1)^m x^{-\nu-m} J_{\nu+m}(x)$

3. Funciones de Bessel de segunda especie

Las funciones de Bessel de segunda especie y orden ν, donotadas por $Y_\nu(x)$, vienen definidas por la fórmula

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen\nu\pi} \qquad (\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x)$$

La función $Y_\nu(x)$ es solución de la ecuación de Bessel, ya que es combinación lineal de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ que son soluciones de la misma. Además $Y_\nu(x)$ es linealmente independiente con $J_\nu(x)$ y con $J_{-\nu}(x)$ (las tres juntas no lo son).

Para garantizar la buena definición de $Y_n(x)$, basta garantizar la existencia del límite correspondiente. Para lo cual se usa la regla de L'Hopital.

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)} = \lim_{\nu \to n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)\right]}{\pi\ cos(\nu\pi)} =$$

$$= \lim_{\nu \to n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_\nu(x)\right] cos(\nu\pi) - J_\nu(x)\pi\ sen(\nu\pi) - \frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_{-\nu}(x)\right]}{\pi\ cos(\nu\pi)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \to n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(x)] - \frac{J_\nu(x)\pi \; sen(\nu\pi)}{cos(\nu\pi)} - \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}[J_{-\nu}(x)]}{cos(\nu\pi)} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}$$

Por último podremos expresar la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν como

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Ejercicio: Comprobar que las funciones de Bessel de segunda especie verifican las mismas propiedades que las de primera especie

1. $\frac{d}{dx}[x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$
2. $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)$
3. $Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x)$
4. $Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x) = 2Y'_\nu(x)$
5. $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$

3..1 Representación en forma de serie de la función $Y_n(x)$

Teniendo en cuenta que

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}$$

podemos obtener

$$\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[log\left(\frac{x}{2}\right) - \Psi(k+n+1) \right]$$

donde $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

$$\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left[-log\left(\frac{x}{2}\right) + \Psi(k-\nu+1) \right]$$

pero como para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, $\lim_{\nu \to n} \Gamma(k-\nu+1) = \infty$ y $\lim_{\nu \to n} \Psi(k-\nu+1) = \infty$ ocurre que se nos presentan indeterminaciones que resolveremos usando las relaciones

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen(\pi x)} \quad y \quad \Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \; cotg(\pi x)$$

$$\lim_{\nu \to n} \frac{\Psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \lim_{\nu \to n} \left\{ \frac{\Gamma(\nu-k) sen[\pi(\nu-k)]}{\pi} [\Psi(\nu-k) + \pi \; cotg[\pi(\nu-k)]] \right\} =$$

$$\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\Gamma(\nu-k)\Psi(\nu-k)sen[\pi(\nu-k)]}{\pi}+\Gamma(\nu-k)cos[\pi(\nu-k)]\right]=(-1)^{n-k}(n-k-1)! \quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

$$\left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!}\left[-log\frac{x}{2}+\Psi(k-n+1)\right]=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+(-1)^n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(p+n)!}\left[-log\frac{x}{2}+\Psi(p+1)\right]$$

Por tanto

$$Y_n(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[2log\frac{x}{2}-\Psi(k+1)-\Psi(k+n+1)\right]$$

donde para $n=0$ el primer sumatorio es cero. Recordar que

$$\Psi(1)=-\gamma, \qquad \Psi(m+1)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{m} \quad (m=1,2,3,...)$$

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)log\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[\Psi(k+1)+\Psi(k+n+1)\right]$$

Por último

$$Y_0(x)\approx\frac{2}{\pi}log\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (x\to 0)$$

$$Y_n(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \qquad (x\to 0), \quad (n=1,2,...)$$

por lo que $Y_n(x)\to\infty$ cuando $x\to 0$

4. Funciones de Bessel de orden $n+\frac{1}{2}$

Consideremos ahora las funciones de Bessel de orden $n+\frac{1}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{3}{2})}$$

teniendo en cuenta que

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

$$2^{2k+\frac{1}{2}}\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\frac{1}{2}) = 2^{2(k+1)-1}2^{-\frac{1}{2}}\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2k+2)$$

con lo que se obtiene

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{\frac{1}{2}} sen\ x$$

y de forma similar

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{x\pi}\right)^{\frac{1}{2}} cos\ x$$

haciendo uso de la relación

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{sen\ x}{x} - cos\ x\right]$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[sen\ x + \frac{cos\ x}{x}\right]$$

Para las funciones de Bessel de segunda especie hay que tener en cuenta que

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(x) cos\ \frac{\pi}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{sen\ \frac{\pi}{2}} = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} cos\ x$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{J_{-\frac{1}{2}}(x) cos\ (\frac{-\pi}{2}) - J_{\frac{1}{2}}(x)}{sen\ (\frac{-\pi}{2})} = J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} sen\ x$$

y a partir de aquí se actua igual.

5. Apéndice I

Teorema: La función $J_n(x)$, $\quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$ tiene un número infinito de ceros simples, salvo $x = 0$ que es un cero de orden n si $n > 0$.

Teorema: La función $J_\nu(x)$, $\quad (\nu \in \mathbb{R})$ tiene un número infinito de ceros positivos.

Para $x \geq 0$ y $\nu \geq 0$

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \qquad (x \to 0)$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \qquad (x \to \infty)$$

Para $x > 0$ y $\nu \geq 0$

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu} \qquad (x \to 0,\ \nu \to 0)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} sen(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \qquad (x \to \infty)$$

$$Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} log \frac{2}{x} \qquad (x \to 0)$$

6. Apéndice II

Dada la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

si $P(x)$ y $Q(x)$ no son analíticas en $x = x_0$, diremos que x_0 es un punto singular de la ecuación. En caso de que $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ sean analíticas en x_0 diremos que es un punto singular regular. Para la busqueda de soluciones se plantea

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r}$$

siendo r raíz de la ecuación indicial

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

donde $p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x)$ y $q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$

Teorema de Frobenius Sea x_0 un punto singular regular de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial asociada, con $r_1 \geq r_2$ $(\Re(r_1) \geq \Re(r_2))$.

1. Si $r_1 - r_2$ no es un número entero, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma
$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r_1} \qquad a_0 \neq 0$$
$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+r_2} \qquad b_0 \neq 0$$
2. Si $r_1 = r_2$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma
$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r_1} \qquad a_0 \neq 0$$
$$y_2(x) = y_1(x) ln|x - x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+r_1}$$
3. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma
$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r_1} \qquad a_0 \neq 0$$
$$y_2(x) = C y_1(x) ln|x - x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+r_2} \qquad b_0 \neq 0$$
C es una constante que puede ser cero.

Ejemplo: (Ecuación de Bessel)
$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$
$P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = 1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}$ no son analíticas en $x = 0$ pero $\lim_{x \to 0} xP(x) = 1 = p_0$ y $\lim_{x \to 0} x^2 Q(x) = -\nu^2 = q_0$, siendo $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ analíticas en $x = 0$. Por tanto $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel, cuya ecuación indicial es
$$r(r-1) + r - \nu^2 = 0 \implies r^2 - \nu^2 = 0 \implies r_1 = \nu \; y \; r_2 = -\nu$$
se obtienen como soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ que son linealmente independientes siempre que $\nu \neq n \in \mathbb{N}$

7. Apéndice III

La transformada integral de Hankel viene definida por

$$\Phi(y) = (h_\mu \phi)(y) = \int_0^\infty \phi(x)\sqrt{xy}J_\mu(xy)dx \qquad (0 < y < \infty),\ \ (\mu \geq -\frac{1}{2})$$

La función ϕ debe verificar, entre otras propiedades, que $\lim_{x\to\infty} D^k\phi(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$, siendo $D^k = \dfrac{d^k}{dx^k}$ y la velocidad de convergencia a cero mayor que la de cualquier potencia de $\dfrac{1}{x}$.

Si denotamos por N_μ al operador

$$N_\mu f(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}} D x^{-\mu-\frac{1}{2}} f(x)$$

no es complicado verificar que

1. $h_{\mu+1}(-x\phi) = N_\mu h_\mu(\phi)$
2. $h_{\mu+1}(N_\mu\phi) = -y h_\mu(\phi)$

Demostración:

1. Primero comprobemos que $D_y y^{-\mu} J_\mu(xy) = -xy^{-\mu}J_{\mu+1}(xy)$, para ello hagamos el cambio $xy = u$, con lo que $D_y = \dfrac{d}{dy} = \dfrac{d}{du}\dfrac{du}{dy} = x\dfrac{d}{du} = xD_u$. Por lo tanto

$$D_y y^{-\mu} J_\mu(xy) = xD_u u^{-\mu} x^\mu J_\mu(u) = x^{\mu+1} D_u u^{-\mu} J_\mu(u) =$$

$$= -x^{\mu+1} u^{-\mu} J_{\mu+1}(u) = -x^{\mu+1} x^{-\mu} y^{-\mu} J_{\mu+1}(xy) = -xy^{-\mu} J_{\mu+1}(xy)$$

Probemos ahora la igualdad pedida

$$N_\mu h_\mu(\phi)(y) = y^{\mu+\frac{1}{2}} D_y y^{-\mu-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \phi(x)\sqrt{xy}J_\mu(xy)dx = y^{\mu+\frac{1}{2}} D_y \int_0^\infty \phi(x) x^{\frac{1}{2}} y^{-\mu} J_\mu(xy)dx =$$

$$= y^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \phi(x) x^{\frac{1}{2}} D_y \left[y^{-\mu} J_\mu(xy)\right] dx = y^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \phi(x) x^{\frac{1}{2}} \left[-xy^{-\mu} J_{\mu+1}(xy)\right] dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[-x\phi(x)\right] \sqrt{xy} J_{\mu+1}(xy)dx = h_{\mu+1}\left[-x\phi\right](y)$$

2.

$$h_{\mu+1}(N_\mu\phi)(y) = \int_0^\infty \left[x^{\mu+\frac{1}{2}} d_x x^{-\mu+\frac{1}{2}} \phi(x)\right] \sqrt{xy} J_{\mu+1}(xy)dx = \star$$

aplicando el método de integración por partes

$$u = x^{\mu+\frac{1}{2}} \sqrt{xy} J_{\mu+1}(xy) = y^{\frac{1}{2}} x^{\mu+1} J_{\mu+1}(xy) \implies du = y^{\frac{3}{2}} x^{\mu+1} J_\mu(x)dx$$

$$dv = D_x\left[x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right]dx \implies v = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)$$

por lo tanto

$$\star = [\sqrt{xy}J_{\mu+1}(xy)\phi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty \phi(x)x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}J_\mu(x)dx = 0 - y\int_0^\infty \phi(x)\sqrt{xy}J_\mu(x)dx = -yh_\mu(\phi)(y)$$

Nota: recordar que para $x \geq 0$ y $\nu \geq 0$ se tiene

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)} \qquad (x \to 0)$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \qquad (x \to \infty)$$