EJERCICIOS DE FÍSICA MATEMÁTICA

I. Exprese el numero complejo en sus distintas notaciones (binomial, polar, exponencial y trigonométrica). Además efectúa las operaciones en cada una de las notaciones: de suma del ejercicio uno más el ejercicio dos (1+2), 1+4; la multiplicación de 2X3, 1x3 y 3x4; la división de ½, 1/3 , 2/4.

Ejemplo z= 1+2i forma binomial

R= $\sqrt{1^2+2^2}$

Θ = artan(2/1) =63.4 °

Z=$\sqrt{5}$ ∟63.4° forma polar

Z= $\sqrt{5}\ e^{i\,63.4}$ forma exponencial

Z= $\sqrt{5}$ (cos 63.4 + i sen 63.4) forma trigonométrica

1. Z= 3 +4i
2. Z=3-4i
3. Z=4-4i
4. Z=2-2i

II. Halle el logaritmo natural de cada uno de los ejercicios del apartado I (utilice notación exponencial).

III. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. Z^6 +8 =0
2. Z^4 + 4=0
3. Z^3 -4 =0
4. Se w una raíz n-ésima de la unidad con w diferente de cero, evalué:
   $1+ 2w + 3w^2 + \ldots\ n\, w^{n-1}$

IV. Muestre la identidad

$$sen\frac{\Pi}{n}\ sen\ \frac{2\Pi}{n} \ldots\ldots sen\ \frac{(n-1)\Pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

V. Estudie el comportamiento infinitesimal de las funciones:

1. f(z)= 1/(z-1) , z_0 = i
2. f(z)= (3z-1)/(3-z) , z_0 =2i
3. f(z) = $(2z+3)^2$.

VI. Muestre que

1. $\frac{\partial(f.g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} g + \frac{\partial g}{\partial z}\ f$ cumple con la regla del producto
2.

VII. Calcule la derivada y de la región de analiticidad

1. 3^z
2. Log(z+1)
3. Z^{1+i}

SERIES E INTEGRALES. RECORDAR QUE

$$\int_\gamma\ dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ai}^{ai+1} f(\gamma(t)\ \dot{\gamma}\ \ (t)$$ Para una curva por tramos parametrizada

$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\,\Pi\, i\, f(z_0)$ Teorema de la integral de Cauchy

VIII. Evalué

1. $\int (z-\frac{1}{z}) dz$ donde sigma es la trayectoria de la línea recta de 1 a i

   Respuesta . –(1 + i ½ Π).

2. $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2-2z}\, dz$ donde gama es el círculo de radio 1 centrado en 2 recorridos una vez en sentido horario Respuesta. Π i

3. $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+2z}\, dz$ Donde gama es el círculo de radio 1 centrado en -2 recorridos una vez en sentido horario respuesta. -Π i

4. $\int_{\gamma} \sqrt{z^2-1}\, dz$ Donde gama es de radio ½ centrado en cero.

   Respuesta. 0

5. $\int_{\gamma} \frac{e^{-z}dz}{z-\frac{\Pi}{2}i}$ sobre la curva de $|Z| = 2$

   Respuesta 2 Π

6. $\int_{\gamma} \frac{zdz}{2z+1}$ sobre la curva de $|Z| = 2$

   Respuesta. –Π i /2

7. $\int_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z(z^2+8)}$ sobre la curva de $|Z| = 2$

   Respuesta.

8. $\int_{\gamma} \frac{\cosh z dz}{(z^4)}$ sobre la curva de $|Z| = 2$

   Respuesta

9. Muestre que u(x,y)= $x^3 - 3xy^2$ es armónica en C y encuentre una armónica conjugada v tal que v(0,0) = 2

   Respuesta. V(x,y) = $3x^2y - y^3+2$

10. Muestre que u (x,y) = log($\sqrt{x^2+y^2}$ es armónica, pero que no tiene armónica conjugada en C/ { 0}.

    Respuesta.

11. Determine si las siguientes funciones son analíticas
    a. f(z)= $3z^2 + 7z + 5$
    b. $f(z) = (2z+3)^2$
    c. $f(z) = \frac{3z-1}{3-z}$
    d. $f(z) = z^5$

12. Si u es armónica, demuestre que, en términos de coordenadas polares

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

13. Si $\left\{ z \in C \;\middle|\; |z - z_0| < r \right\}$ donde r es el radio de convergencia, entonces

$f\ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n|} (z - z_0)^n$ Es una serie llamada de Taylor. Hallar la serie en cada caso

a. Senα
b. Cos α
c. $sen\ hz\ = (1 + z)^{\alpha}$
d. $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ alrededor de $z_0 = 0$
e. $sen\ z^2$ en $z_0 = 0$
f. e^{2z} en $z_0 = 0$

14. Hallar el radio de convergencia de :
    a. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z)^n$
    b. $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 (z)^n$
    c. $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z)^n$

IX. Aplicaciones a los circuitos

- Utilizando la ley de Ohm en forma compleja **I** ∟ (α-θ) = $\frac{\mathbf{V} \llcorner \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{Z} \llcorner \boldsymbol{\theta}}$

1. Determinar las constantes del circuito para la tensión y corriente siguiente:
   V=150 sen(5000t + 45°) voltios, i= 3 sen (5000t – 15°) amperios.
   Solución:
   El modulo del fasor es $1/\sqrt{2}$ veces el valor máximo.
   V=$\frac{150}{\sqrt{2}} \llcorner 45° = 106 \llcorner 45°$
   I=$\frac{3}{\sqrt{2}} \llcorner -15°$ = 2.12∟-15°

   Z= V/I =50∟ 60° = 25 + i 43.3

La corriente está retrasada respecto de la tensión por lo que se trata de un circuito RL
wL = 43.3 de donde L =43.3/5000 = 8.6 mH
R= 25 ohms y L = 8.6 mH

2. Determine las constantes del circuito si V= 311sen (2500t +170°) voltios y i= 15.5 sen(2500t -145°)
   Respuesta R= 14.4 ohm y C =28.3 uF.

3. A un circuito serie con R= 10 ohmios y C =40 uF se le aplica una tensión de v=500 cos(2500t -20°) voltios . halle la intensidad de corriente que circula por él.
   Resp. I =$25\sqrt{2}$ cos(2500t + 25).

4. Halle la suma de las intensidades de la corrientes
   I1=32.6 sen(wt-145°) amperios, i1=32.6 sen(wt-25°) amperios, i3= 32.6 sen(wt+95°) amperios.
   Resp. i1+i2+i3 = 0 + I 0.09