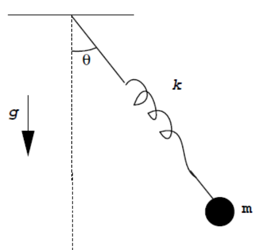
Solución:

1. El Espacio fásico está constituido por 2 S dimensiones, cuyos ejes corresponden a la S coordenadas generalizadas y a los S ímpetus o mementos generalizados ………
2. Un sistema compuesto por 5 partículas sometido a 5 ecuaciones de ligadura que relacionan las coordenadas rectangulares, el sistema quedara completamente definido por S= 3n – m :
   donde 3(5) -5 = 10 …… coordenadas …Generalizadas. ,¿ cuantos grados de libertad tendrá el sistema … el sistema tendría 10 grados de libertad
3. Menciones los tipos de ligadura ……Holónomas . estas se caracterizan por son …son funciones explícitamente dependientes del tiempo ………………., …Rehónomas ..y estas se caracterizan por …las funciones no dependen explícitamente del tiempo …y las escleronomas llamadas móviles que tiene que ver con sistemas no inerciales …
4. $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. estas ecuaciones se conocen como ……Canónicas …..………………………………. donde H es el Hamiltoniano ……..q es …la velocidad generalizada .y p es ……Momentun generalizado ..

5. El problema fundamental del cálculo de variaciones es determinar que J sea un extremal ……
   $J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\}\, dx$ y $y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x)$ es la función ……variada …donde n(α) es una función de x .. cuya primera derivada es continua y que se anula en x1 y x2

6. Hallar las ecuaciones de Movimiento a) utilizando leyes de Newton b) Euler-Lagrange c) Hamiltoniana, para una masa pendular suspendida de un resorte, por aplicacion directa del principio de Hamilton. 3 ptos



Para el péndulo de la figura la Lagrangiana es de la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-r_o)^2 \ ,$$

por lo tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[m\left(\dot{r}\,\delta\,\dot{r} + r\,\dot{\theta}^2 + r^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\right) + mg\delta r\cos\theta - mgr\delta\theta\sin\theta - k(r-r_o)\delta r \right] dt$$

$$m\,\dot{r}\,\delta\,\dot{r}\,dt = m\,\dot{r}\,d(\delta r) = d\left(m\,\dot{r}\,\delta r\right) - m\delta r\,\ddot{r}\,dt \ .$$

Igualmente

$$mr^2\theta^2\delta\,\dot{\theta}\,dt = d\left(mr^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\right) - \delta\theta\frac{d\left(mr^2\,\dot{\theta}\right)}{dt}dt$$

$$= d\left(mr^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\right) - \delta\theta\left(mr^2\,\ddot{\theta} + 2mr\,\dot{r}\dot{\theta}\right)dt \ .$$

Por tanto la integral anterior se escribe como

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left\{m\,\ddot{r} - mr\,\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k\,(r-r_o)\right\} + \left\{mr^2\,\ddot{\theta} + 2mr\,\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta\right\}\delta\theta\right]dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[d\left(m\,\dot{r}\,\delta r\right) + d\left(mr^2\theta^2\,\dot{\theta}\,\delta\theta\right)\right] = 0 \ .$$

Suponiendo que δr y $\delta\theta$ son ambas iguales a cero en t_1 y t_2 la segunda integral es evidentemente nula. Como δr y $\delta\theta$ son completamente independientes, la primera integral puede ser cero solamente si

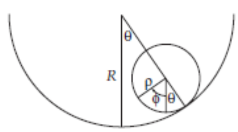
$$m\,\ddot{r} - mr\,\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r-r_o) = 0$$

y

$$mr^2\,\ddot{\theta} + 2mr\,\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \ ,$$

7. Una esfera de radio ρ esta obliga a rodar sin deslizar sobre la mitad inferior de la superficie interior de un cilindro hueco de radio interno R. a) determine la Lagrangiana b) la ecuación de ligadura c) las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

3 ptos



If we take angles θ and ϕ as our generalized coordinates, the kinetic energy and the potential energy of the system are

$$T = \frac{1}{2}m\left[(R-\rho)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}I\,\dot{\phi}^2 \qquad (1)$$

$$U = \left[R-(R-\rho)\cos\theta\right]mg \qquad (2)$$

where m is the mass of the sphere and where $U=0$ at the lowest position of the sphere. I is the moment of inertia of sphere with respect to any diameter. Since $I=(2/5)\,m\rho^2$, the Lagrangian becomes

$$f(\theta,\phi)=(R-\rho)\theta-\rho\phi=0$$

Therefore, we have two Lagrange's equations with one undetermined multiplier:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right]+\lambda\frac{\partial f}{\partial\theta}=0\\ \frac{\partial L}{\partial\phi}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right]+\lambda\frac{\partial f}{\partial\phi}=0\end{aligned}\right]$$

After substituting (3) and $\partial f/\partial\theta=R-\rho$ and $\partial f/\partial\phi=-\rho$ into (5), we find

$$-(R-\rho)mg\sin\theta-m(R-\rho)^2\ddot\theta+\lambda(R-\rho)=0$$

$$-\frac{2}{5}m\rho^2\ddot\phi-\lambda\rho=0$$

From (7) we find λ:

$$\lambda=-\frac{2}{5}m\rho\ddot\phi$$

$$\lambda=-\frac{2}{5}m(R-\rho)\ddot\theta \qquad (9)$$

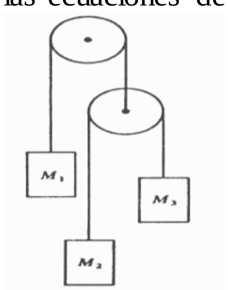
Substituting (9) into (6), we find the equation of motion with respect to θ:

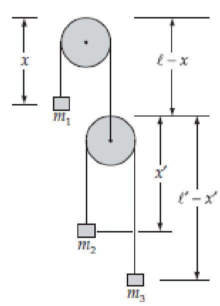
$$\ddot\theta=-\omega^2\sin\theta \qquad (10)$$

where ω is the frequency of small oscillations, defined by

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-\rho)}} \qquad (11)$$

8. En la figura 8 se representa la máquina de Atwood doble, a) escoger un sistema de coordenadas adecuado y escribir las ecuaciones de movimiento de Lagrange .b) encontrar las aceleraciones de las masas, desprecia masa de poleas y cuerdas. c) escriba las ecuaciones de movimiento utilizando las leyes de Newton. Figura 8. 4 ptos.





Neglect the masses of the pulleys

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot x^2+\frac{1}{2}m_2(\dot x'-\dot x)^2+\frac{1}{2}m_3(-\dot x-\dot x')^2$$

$$U=-m_1gx-m_2g(\ell-x+x')-m_3g(\ell-x+\ell'-x')$$

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{x}'^2+\dot{x}\dot{x}'(m_3-m_2)$$
$$+g(m_1-m_2-m_3)x+g(m_2-m_3)x'+\text{constant}$$

We redefine the zero in U such that the constant in $L = 0$.

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2+m_3)\dot{x}+(m_3-m_2)\dot{x}' \qquad (1)$$

$$p_{x'}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}=(m_3-m_2)\dot{x}+(m_2+m_3)\dot{x}' \qquad (2)$$

Solving (1) and (2) for p_x and $p_{x'}$ gives

$$\dot{x}=D^{-1}\left[(m_2+m_3)p_x+(m_2-m_3)p_{x'}\right]$$

$$\dot{x}'=D^{-1}\left[(m_2+m_3)p_x+(m_1+m_2+m_3)p_{x'}\right]$$

where $D=m_1m_3+m_1m_2+4m_2m_3$

$$H=T+U$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{x}^2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{x}'^2+(m_3-m_2)x\dot{x}$$
$$-g(m_1-m_2-m_3)x-g(m_2-m_3)x'$$

Substituting for $\dot{x}$ and $\dot{x}'$ and simplifying gives

$$\boxed{\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}(m_2+m_3)D^{-1}\,p_x^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)D^{-1}\,p_{x'}^2\\&+(m_2-m_3)D^{-1}\,p_xp_{x'}-g(m_1-m_2+m_3)x-g(m_2-m_3)x'\\&\text{where } D=m_1m_3+m_1m_2+4m_2m_3\end{aligned}}$$

The equations of motion are

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial p_x}=(m_2+m_3)D^{-1}\,p_x+(m_2-m_3)D^{-1}\,p_{x'}\\ \dot{x}'&=\frac{\partial H}{\partial p_{x'}}=(m_2-m_3)D^{-1}\,p_{x'}+(m_1+m_2+m_3)D^{-1}\,p_{x'}\\ \dot{p}_x&=-\frac{\partial H}{\partial x}=g(m_1-m_2-m_3)\\ \dot{p}_{x'}&=-\frac{\partial H}{\partial x'}=g(m_2-m_3)\end{aligned}}$$