

Los Alamos Electronic Archives: physics/9906066

IFUG

*La verdad os hará libres*

**CURSO:** MECÁNICA CLÁSICA

**EDITOR:** HARET C. ROSU

rosu@ifug3.ugto.mx

$$\vec{F}_a = M \vec{a}$$

$$\vec{F}_p = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F}_v = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

curso de maestría  
(graduate course)

Copyright © 1999 H.C. Rosu  
León, Guanajuato, México  
v1: Junio de 1999.

## INDICE DE CONTENIDO

1. LOS PRINCIPIOS DE MINIMO ... 3.
2. MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES ... 20.
3. CUERPO RIGIDO ... 34.
4. OSCILACIONES PEQUEÑAS ... 55.
5. TRANSFORMACIONES CANONICAS ... 73.
6. PARENTESIS DE POISSON ... 83.
7. LAS ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI ... 86.
8. VARIABLES ACCION-ANGULO ... 94.
9. TEORIA CANONICA DE PERTURBACIONES ... 101.
10. INVARIANTES ADIABATICOS ... 116.
11. MECANICA DE SISTEMAS CONTINUOS ... 120.

Estudiantes colaboradores:

Eri Mena (1)

Julio López (2,3)

Alberto Juárez (4)

Mario Ranferí Gutiérrez (5-8)

Zaida Urrutia (9,10)

Mónica Beltrán (11)

*Gran parte de la responsabilidad del idioma pertenece a los estudiantes.*

# 1. LOS PRINCIPIOS DE MINIMO

**Prólogo:** La historia de los principios de “mínimo” en la física es larga e interesante. La investigación de tales principios se argumenta sobre la idea de que la Naturaleza actúa siempre de tal forma que determinadas cantidades de importancia resultan ser siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. La base matemática de estos principios es el cálculo variacional.

## **CONTENIDO:**

1. Introducción
2. Principio de mínima acción
3. Principio de D'Alembert
4. Espacio físico
5. Espacio de configuraciones
6. Ligaduras
7. Ecuaciones de movimiento de Hamilton
8. Leyes de conservación
9. Aplicaciones del principio de acción

## 1. Introducción

La experiencia ha demostrado que, cuando sea posible despreciar los efectos relativistas, el movimiento de una partícula dentro de un sistema de referencia inercial queda correctamente descrito mediante la ecuación de Newton  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Cuando suceda que la partícula no haya de ejecutar un movimiento complicado y se utilicen coordenadas rectangulares para describirlo, generalmente las ecuaciones de movimiento serán relativamente sencillas; ahora bien si no se verifica ninguna de estas condiciones, las ecuaciones pueden hacerse bastante complicadas y difíciles de manejar.

Cuando una partícula está limitada a moverse sobre una superficie dada, deben existir ciertas fuerzas (llamadas fuerzas de ligadura) que mantengan a la partícula en contacto con dicha superficie. Con el fin de facilitar algunos problemas de índole práctico que aparecen al aplicar las fórmulas de Newton a ciertos problemas, pueden desarrollarse otros procedimientos. Esencialmente, todos estos procedimientos de abordar los problemas son a posteriori, puesto que sabemos de antemano que hemos de obtener resultados equivalentes a las fórmulas de Newton. Entonces, no es necesario formular una nueva teoría de la mecánica —la teoría de Newton es suficientemente correcta— para efectuar una simplificación, sino que basta con idear otro método que nos permita abordar problemas complicados de forma general. El principio de Hamilton contiene un método de este carácter y las ecuaciones de movimiento que resultan de la aplicación del mismo se llaman ecuaciones de Lagrange.

Si las ecuaciones de Lagrange han de constituir una descripción adecuada de la dinámica de las partículas, deberán ser equivalentes a las ecuaciones que resulten de las fórmulas de Newton. Por otra parte, el principio de Hamilton es de aplicación a una amplia gama de fenómenos físicos (en especial los relativos a campos) con los que generalmente no se relacionan las ecs. de Newton. Es seguro que cada una de las consecuencias que pueden extraerse del principio de Hamilton fue deducida primero, al igual que las ecs. de Newton, relacionando entre sí hechos experimentales. El principio de Hamilton no nos proporciona teoría física nueva alguna, pero nos ha permitido unificar satisfactoriamente muchas teorías separadas, partiendo de un postulado fundamental sencillo. Ello no constituye un ejercicio de habilidad, puesto que el objetivo de la física no es únicamente dar una formulación matemática precisa para los fenómenos observados, sino también describir sus efectos con ahorro de postulados fundamentales y de la manera más unificada posible.

El primero de los principios de mínimo se desarrolló en el campo de la óptica por Herón de Alejandría hace casi dos mil años. Encontró que la ley que rige la reflexión de la luz puede obtenerse admitiendo que un rayo luminoso, que viaje de un punto a otro reflejándose en un espejo plano, recorre siempre el camino más corto. No obstante, el principio del camino más corto de Herón no puede proporcionar una expresión correcta de la ley de la refracción. En 1657, Fermat formuló nuevamente el principio postulando que los rayos luminosos viajan siempre de un punto a otro de un medio siguiendo el camino que requiera el menor tiempo. Este principio del tiempo mínimo de Fermat conduce inmediatamente, no sólo a la ley correcta de la reflexión, sino también a la ley de la refracción de Snell.

Los estudios acerca de los principios de mínimo continuaron y, en la última parte del siglo XVII, Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli iniciaron el desarrollo del cálculo variacional. En años posteriores este principio recibió de Lagrange una base matemática sólida (1760). En 1828, Gauss desarrolló un método para estudiar la mecánica mediante su principio de ligadura mínima. En sendos trabajos, publicados en 1834 y 1835, Hamilton expuso el principio dinámico de la mínima acción sobre el cual es posible formular toda la mecánica y a decir verdad, la mayor parte de la física.

Acción es una magnitud de dimensiones longitud por ímpetu o bien energía por tiempo.

## 2. Principio de mínima acción

La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *principio de mínima acción (o de Hamilton)*. Según este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_s, t),$$

o más brevemente  $L(q, \dot{q}, t)$ , y el movimiento del sistema satisface la siguiente condición: Supongamos que en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$  el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ ; el sistema se mueve entre estas posiciones de manera que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1}$$

tome el menor valor posible. La función  $L$  se llama *Lagrangiana* del sistema, y la integral (1) la *acción*. La función de Lagrange no contiene más que  $q$

y  $\dot{q}$ , y no las derivadas superiores, eso es debido al hecho que el estado mecánico de un sistema está completamente definido por sus coordenadas y sus velocidades.

Establezcamos ahora las ecuaciones diferenciales que determinan el mínimo de la integral (1). Por simplicidad empecemos suponiendo que el sistema no tiene más que un sólo grado de libertad, de manera que hace falta determinar una sola función  $q(t)$ . Sea precisamente  $q = q(t)$  la función para la cual  $S$  es un mínimo. Esto significa que  $S$  crece cuando se sustituye  $q(t)$  por una función cualquiera

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2)$$

donde  $\delta q(t)$  es una función que es pequeña en todo el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  [se le llama variación de la función  $q(t)$ ]. Puesto que para  $t = t_1$  y  $t = t_2$  todas las funciones (2) deben tomar los mismos valores  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ , se tiene:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3)$$

Lo que varía  $S$  cuando se reemplaza  $q$  por  $q + \delta q$  está dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

El desarrollo en serie de esta diferencia en potencias de  $\delta q$  y  $\delta \dot{q}$  comienza por términos de primer orden. La condición necesaria de mínimo (en general extremal) de  $S$  es que el conjunto de estos términos se anule; Así el principio de mínima acción puede escribirse:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (4)$$

o, efectuando la variación:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $\delta \dot{q} = d/dt(\delta q)$ , integramos el segundo término por partes y se obtiene:

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (5)$$

En virtud de las condiciones (3), el primer término de esta expresión desaparece. Queda una integral, la cual debe anularse para todo valor de  $\delta q$ . Esto es solamente posible si el integrando es idénticamente nulo, y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 .$$

Si hay varios grados de libertad, las  $s$  funciones diferentes  $q_i(t)$  deben variar independientemente. Es evidente que entonces obtenemos  $s$  ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (6)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales buscadas; en Mecánica se les llama *ecuaciones de Lagrange*. Si se conoce la lagrangiana de un sistema mecánico dado, entonces las ecuaciones (6) establecen la relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas, es decir, son las ecuaciones del movimiento del sistema. Desde un punto de vista matemático, las ecuaciones (6) forman un sistema de  $s$  ecuaciones diferenciales de segundo orden con  $s$  funciones desconocidas  $q_i(t)$ . La solución general del sistema contiene  $2s$  constantes arbitrarias. Para determinarlas y, por lo tanto, para definir completamente el movimiento del sistema mecánico, es necesario conocer las condiciones iniciales que caractericen el estado del sistema en un instante dado, por ejemplo los valores iniciales de las coordenadas y de las velocidades.

### 3. Principio de D'Alembert

Desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas  $\delta \mathbf{r}_i$ , compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado  $t$ . Se llama virtual al desplazamiento para distinguirlo del desplazamiento real del sistema que tiene lugar en un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual puede variar las fuerzas y ligaduras.

Las ligaduras (o restricciones) introducen 2 tipos de dificultades en la solución de problemas mecánicos:

- (1) No todas las coordenadas son independientes.
- (2) Las fuerzas de ligadura por lo general no se conocen a priori, son parte de las incógnitas del problema y han de obtenerse a partir de la solución buscada.

En el caso de ligaduras holonómicas la dificultad (1) se salva introduciendo coordenadas independientes  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ , donde  $m$  es el número de grados de libertad). Esto es, si hay  $m$  ecuaciones de ligadura y  $3N$  coordenadas  $(x_1, \dots, x_{3N})$ , podemos eliminar esas  $m$  ecs. introduciendo las variables independientes  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$  mediante una transformación de la forma

$$x_1 = f_1(q_1, \dots, q_m, t)$$

$\vdots$

$$x_{3N} = f_{3N}(q_1, \dots, q_m, t) ,$$

donde  $n = 3N - m$ .

Para librarnos del problema (2) necesitamos formular la mecánica de modo que las fuerzas de ligadura NO APAREZCAN en la solución de problemas. Esta labor constituye la esencia de lo que llamaremos “*El Principio de Trabajos Virtuales*”.

**Trabajo Virtual:** Supongamos que un sistema de  $N$  partículas se describe por  $3N$  coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$  y sean  $F_1, F_2, \dots, F_{3N}$  las componentes de las fuerzas que actúan sobre cada una. Si las partículas del sistema experimentan desplazamientos infinitesimales e instantáneos  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N}$  debido a dichas fuerzas, entonces el trabajo realizado es:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \delta x_j . \quad (7)$$

Dichos desplazamientos se llaman *desplazamientos virtuales* y  $\delta W$  se llama *trabajo virtual*; (7) también puede escribirse como:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r} . \quad (8)$$

**Fuerzas de ligadura o de restricción:** además las fuerzas externas  $\mathbf{F}_\alpha^{(e)}$  las partículas pueden estar sujetas a fuerzas de ligadura  $\mathbf{F}_\alpha$ .

**Principio de trabajo virtual:** Sea  $\mathbf{F}_\alpha$  la fuerza que actúa sobre la  $\alpha$ -ésima partícula, si separamos  $\mathbf{F}_\alpha$  en la contribución de origen externo  $\mathbf{F}_\alpha^{(e)}$  y la ligadura  $\mathbf{R}_\alpha$

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{(e)} + \mathbf{R}_\alpha . \quad (9)$$



Si el sistema está en equilibrio entonces

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{(e)} + \mathbf{R}_\alpha = 0 . \quad (10)$$

Así que el trabajo virtual debido a todas las posibles fuerzas  $\mathbf{F}_\alpha$  es:

$$W = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{F}_\alpha^{(e)} + \mathbf{R}_\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 . \quad (11)$$

Si el sistema es tal que sus fuerzas de ligadura no producen trabajo virtual entonces de (11) concluimos que:

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha^{(e)} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 . \quad (12)$$

Ya hechas las definiciones anteriores podemos llegar a lo que es el principio de D'Alembert. La ecuación del movimiento es según Newton:

$$\mathbf{F}_\alpha = \dot{\mathbf{p}}_\alpha$$

y puede escribirse de la forma

$$\mathbf{F}_\alpha - \dot{\mathbf{p}}_\alpha = 0 ,$$

que dice que las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una fuerza invertida  $-\dot{\mathbf{p}}_i$ . En vez de (12) podemos escribir inmediatamente

$$\sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{F}_\alpha - \dot{\mathbf{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 \quad (13)$$

y haciendo la misma descomposición en fuerzas aplicadas y fuerzas de ligadura ( $\mathbf{f}_\alpha$ ), resulta:

$$\sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{F}_\alpha^{(e)} - \dot{\mathbf{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{f}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 .$$

Limitémonos de nuevo a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo y obtendremos

$$\sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{F}_\alpha^{(e)} - \dot{\mathbf{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 , \quad (14)$$

que constituye el *principio de D'Alembert*. Ahora esta ecuación anterior aún no tiene forma útil para proporcionar las ecuaciones de movimiento del sistema, por lo que debemos transformar el principio en una expresión que contenga desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son entonces independientes entre si esto implica que se podran hacer cero los coeficientes de  $\delta\mathbf{q}_\alpha$  y la velocidad en término de las coordenadas generalizadas es:

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \quad \text{donde} \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, t) .$$

Análogamente, el desplazamiento virtual arbitrario  $\delta\mathbf{r}_\alpha$  se puede relacionar con los desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{q}_j$  mediante

$$\delta\mathbf{r}_\alpha = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j .$$

Entonces en función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las  $\mathbf{F}_\alpha$  será:

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = \sum_{j,\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j , \quad (15)$$

donde las  $Q_j$  son las llamadas componentes de la fuerza generalizada, las cuales se definen en la forma

$$Q_j = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} .$$

Ahora si vemos a la ec. (14) como:

$$\sum_\alpha \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha \quad (16)$$

y sustituyendo en esta ultima ec. los resultados anteriores podemos ver que (16):

$$\sum_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial q_j} \right\} = \sum_j \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0 . \quad (17)$$

Las variables  $q_j$  pueden ser un sistema cualquiera de coordenadas para describir el movimiento del sistema. Sin embargo, si las ligaduras son holonomas, será posible encontrar sistemas de coordenadas  $q_j$  independientes que contengan implícitamente las condiciones de ligadura en las ecuaciones de transformación  $x_i = f_i$  es que se anulen por separado los coeficientes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_j . \quad (18)$$

En total hay  $m$  ecuaciones. Las ecuaciones (18) suelen llamárseles ecuaciones de Lagrange, si bien esta designación se reserva frecuentemente para la forma que toman estas ecuaciones, cuando las fuerzas se derivan de un potencial escalar  $V$

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_\alpha V.$$

Entonces  $Q_j$  puede escribirse como:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} .$$

Las ecuaciones (18) pueden escribirse también en la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (19)$$

y definiendo la función *Lagrangiana*  $L$ , en la forma  $L = T - V$  se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (20)$$

Estas son las **Ecuaciones de Lagrange**.

#### 4. - Espacio Fásico

En la interpretación geométrica de los fenómenos mecánicos se hace frecuentemente uso del concepto de *espacio fásico*, es un espacio de  $2s$  dimensiones cuyos ejes coordenados corresponden a los  $s$  coordenadas generalizadas y a los  $s$  ímpetus del sistema mecánico considerado. Cada punto en este espacio corresponde a un estado definido del sistema. Cuando el sistema se mueve, el punto representativo en el espacio fásico describe una línea denominada *trayectoria fásica*.

## 5. - Espacio de Configuraciones

El estado de un sistema compuesto de  $n$  partículas y sometido a  $m$  ligaduras que relacionen entre sí a algunas de las  $3n$  coordenadas rectangulares queda especificado por completo mediante  $s = 3n - m$  coordenadas generalizadas. Es posible, pues, representar el estado de tal sistema por un punto de un espacio de  $s$  dimensiones que llamamos *espacio de configuraciones*, correspondiendo cada una de las dimensiones de este espacio a una de las  $q_j$ . La historia, o evolución a través del tiempo, del sistema, estará representada por una curva del espacio de configuraciones, cada uno de cuyos puntos representará la configuración del sistema en un instante determinado.

## 6. - Ligaduras

Es necesario tener en cuenta las *ligaduras* que limitan el movimiento del sistema. Las ligaduras pueden clasificarse de diversas maneras. En el caso general en que las ecuaciones de ligadura puedan expresarse como:

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0 ,$$

donde las  $c_{\alpha i}$  son funciones de las coordenadas solamente (el índice  $\alpha$  numera las ecuaciones de ligadura). Si los primeros miembros de estas ecuaciones no son derivadas totales con respecto al tiempo de funciones de las coordenadas, estas ecuaciones no pueden ser integradas. En otras palabras, no pueden reducirse a relaciones entre las coordenadas solamente, que podrían utilizarse para expresar la posición e los cuerpos por un número menor de coordenadas, correspondiente al número real de grados de libertad. Tales ligaduras se llaman *no holonómicas* (en oposición a las ligaduras anteriores son las llamadas *holonómicas* que relacionan solamente las coordenadas del sistema).

## 7. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

La formulación de las leyes de la Mecánica con la ayuda de la Lagrangiana, presupone que el estado mecánico del sistema está determinado dando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Sin embargo, éste no es el único método posible; la descripción del estado de un sistema en función de sus coordenadas e ímpetus generalizados presenta un cierto número de ventajas. El paso de un conjunto de variables independientes a otro puede realizarse mediante lo que se llama en matemáticas *transformación de Legendre*. En este caso la transformación toma la siguiente forma, donde la diferencial total de la Lagrangiana como función de las coordenadas y de las velocidades es:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i ,$$

la cual puede escribirse como:

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i , \quad (21)$$

donde ya sabemos que las derivadas  $\partial L / \partial \dot{q}_i$ , son por definición, los ímpetus generalizados y  $\partial L / \partial q_i = \dot{p}_i$  por las ecuaciones de Lagrange. El segundo término de la ec. (21) puede escribirse en la forma

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dq_i .$$

Llevando la diferencial total  $d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right)$  al primer miembro, y cambiando los signos, se obtiene de (21):

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i . \quad (22)$$

La cantidad bajo el signo de la diferencial es la energía del sistema expresada en función de las coordenadas y de los ímpetus y se llama *función de Hamilton o Hamiltoniana* del sistema:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L . \quad (23)$$

Entonces de la ec. (22)

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i$$

en lo cual las variables independientes son las coordenadas y los ímpetus, se obtienen las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (24)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en las variables  $q$  y  $p$  y se llaman *ecuaciones de Hamilton*.

## 8. Leyes de conservación

### 8.1 Energía

Consideremos primero el teorema de conservación que resulta de la *homogeneidad del tiempo*. En virtud de esta homogeneidad, la Lagrangiana de un sistema cerrado no depende explícitamente del tiempo. Entonces la derivada

total respecto al tiempo de la Lagrangiana (no dependiente explícitamente del tiempo) puede escribirse como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

y de acuerdo a las ecs. de Lagrange podemos reescribir la ec. anterior como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

ó

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

De donde se deduce que la magnitud

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (25)$$

permanece constante durante el movimiento de un sistema cerrado, es decir es una integral del movimiento. A esta magnitud se le llama *energía* E del sistema.

## 8.2 Impetu

De la *homogeneidad del espacio* se deduce otro teorema de conservación. En virtud de dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no varían por un desplazamiento paralelo de todo el sistema en el espacio. Consideremos un desplazamiento infinitesimal  $\epsilon$  (i.e., los vectores de posición  $\mathbf{r}_a$  se convierten en  $\mathbf{r}_a + \epsilon$ ) y busquemos la condición para que la lagrangiana no varíe. La variación de la función L, consecuencia de un cambio infinitesimal en las coordenadas (permaneciendo constantes las velocidades de las partículas), está dado por:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a = \epsilon \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

extendiendo la suma a todas las partículas del sistema. Como  $\epsilon$  es arbitrario, la condición  $\delta L = 0$  es equivalente a

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \quad (26)$$

y en virtud de las ecs. de Lagrange ya mencionadas

$$\sum_a \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0 .$$

Llegamos así a la conclusión de que en un sistema mecánico cerrado, la magnitud vectorial (llamada *ímpetu*)

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$$

permanece constante durante el movimiento.

### 8.3 Momento angular ó cinético

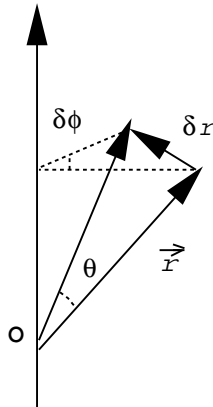
Estudiemos ahora el teorema de conservación que infiere de la *isotropía del espacio*. Consideremos una rotación infinitesimal del sistema, y busquemos la condición para que la Lagrangiana no varíe.

Llamaremos vector de rotación infinitesimal  $\delta\phi$  al vector cuyo módulo es igual al ángulo de rotación  $\delta\phi$  y cuya dirección coincide con el eje de rotación. Consideremos primero el incremento en el vector de posición correspondiente a una partícula del sistema, tomando un origen de coordenadas situado en el eje de rotación. El desplazamiento lineal extremo del vector de posición en función de ángulo es

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \delta\phi ,$$

(ver fig.). La dirección del vector  $\delta\mathbf{r}$  es perpendicular al plano definido por  $\mathbf{r}$  y  $\delta\phi$ , y por tanto,

$$\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r} . \tag{27}$$



La rotación del sistema no solamente modifica la dirección de los vectores de posición sino también las velocidades de las partículas, transformándose en todos los vectores según la misma ley. El incremento de velocidad con respecto a un sistema fijo de coordenadas será;

$$\delta \mathbf{v} = \delta \phi \times \mathbf{v} .$$

Llevemos estas expresiones a la condición de que la Lagrangiana no varía por la rotación:

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) = 0$$

y sustituyendo, por definición las derivadas  $\partial L / \partial \mathbf{v}_a$  por  $\mathbf{p}_a$  y las derivadas  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$  de acuerdo con las ecs. de Lagrange, por  $\dot{\mathbf{p}}_a$ ; obtenemos

$$\sum_a \left( \dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta \phi \times \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_a \cdot \delta \phi \times \mathbf{v}_a \right) = 0 ,$$

o permutando circularmente los factores y sacando  $\delta \phi$  fuera del signo suma:

$$\delta \phi \sum_a \left( \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a \right) = \delta \phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0 ,$$

puesto que  $\delta \phi$  es arbitrario, resulta

$$\frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0$$

y se concluye que en el movimiento de un sistema cerrado se conserva la magnitud vectorial (llamada *momento angular* ó *momento cinético*)

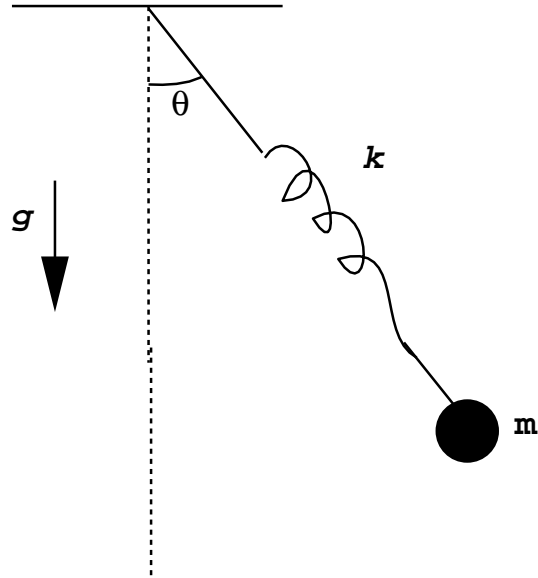
$$M \equiv \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a .$$

## 9.- Aplicaciones del principio de Acción

### a) Ecuaciones de movimiento

Hallar las ecuaciones del movimiento para una masa pendular suspendida de un resorte, por aplicación directa del principio de Hamilton





Para el péndulo de la figura la Lagrangiana es de la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta - \frac{1}{2}k(r - r_o)^2 ,$$

por lo tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left( \dot{r} \delta \dot{r} + r \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) + mg \delta r \cos \theta - mgr \delta \theta \sin \theta - k(r - r_o) \delta r \right] dt$$

$$m \dot{r} \delta \dot{r} dt = m \dot{r} d(\delta r) = d(m \dot{r} \delta r) - m \delta r \ddot{r} dt .$$

Igualmente

$$mr^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = d \left( mr^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) - \delta \theta \frac{d \left( mr^2 \dot{\theta} \right)}{dt} dt$$

$$= d \left( mr^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} \right) - \delta \theta \left( mr^2 \ddot{\theta} + 2mr \dot{r} \dot{\theta} \right) dt .$$

Por tanto la integral anterior se escribe como

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left\{ m \ddot{r} - mr \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + k(r - r_o) \right\} + \left\{ mr^2 \ddot{\theta} + 2mr \dot{r} \dot{\theta} + mgr \sin \theta \right\} \delta \theta \right] dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[ d(m \dot{r} \delta r) + d(mr^2 \dot{\theta} \delta \theta) \right] = 0 .$$

Suponiendo que  $\delta r$  y  $\delta \theta$  son ambas iguales a cero en  $t_1$  y  $t_2$  la segunda integral es evidentemente nula. Como  $\delta r$  y  $\delta \theta$  son completamente independientes, la primera integral puede ser cero solamente si

$$m \ddot{r} - mr \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + k(r - r_o) = 0$$

y

$$mr^2 \ddot{\theta} + 2mr \dot{r} \dot{\theta} + mgr \sin \theta = 0 ,$$

pero estas son las ecuaciones de movimiento del sistema.

#### b) Ejemplo de cálculo de mínimo

Se trata de demostrar que la línea más corta entre dos puntos cualesquiera  $p_1$  y  $C$  sobre un cilindro es una hélice.

La longitud  $S$  de una línea cualquiera sobre un cilindro entre  $p_1$  y  $p_2$  está dada por

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \left[ 1 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz ,$$

donde  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  son las coordenadas cilíndricas usuales con  $r = cte$ . Puede determinarse una relación entre  $\theta$  y  $z$  que le dé a esta integral un valor extremo, por medio de

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 ,$$

donde  $\phi = [1 + r^2 \theta'^2]^{1/2}$  y  $\theta' = \frac{d\theta}{dz}$ , pero como  $\partial \phi / \partial \theta = 0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta'} = \left( 1 + r^2 \theta'^2 \right)^{-1/2} r^2 \theta' = c_1 = cte. ,$$

por esto  $r\theta' = c_2$ . Y así,  $r\theta = c_2 z + c_3$  que es la ecuación de una hélice. Supongamos que en  $p_1$  se tiene  $\theta = 0$  y  $z = 0$ , entonces  $c_3 = 0$ . En  $p_2$ , hágase  $\theta = \theta_2$  y  $z = z_2$  por tanto  $c_2 = r\theta_2/z_2$ , y  $r\theta = (r\theta_2/z_2)z$  es la ecuación final.

## **Bibliografía**

- L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*, Física Teórica, vol I, editorial Reverté, S.A. (1969)
- H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, editorial Reverté, S.A. (1992)

## 2. MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

**Prólogo:** Por motivos astronómicos este fue el movimiento más estudiado del punto de vista experimental en los primeros dos siglos de física moderna y representa un ejemplo principal para cualquier tipo de formalismo matemático. En su variante relativista, el problema de Kepler sigue siendo de gran interés.

### CONTENIDO:

2.1 Problema de dos cuerpos: reducción al problema de un cuerpo.

2.2 Ecuaciones de movimiento.

2.3 Ecuación diferencial de la órbita.

2.4 Problema de Kepler.

2.5 Dispersión por un centro de fuerzas (con ejemplo).

### 2.1 Problema de 2 cuerpos: Reducción al problema de un cuerpo.

Consideremos un sistema monógeno de dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , en el cual las únicas fuerzas son las debidas a un potencial de interacción  $V$ . Supondremos que  $V$  es función de cualquier vector entre  $m_1$  y  $m_2$ ,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , o de sus velocidades relativas  $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$ , o de derivadas superiores de  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Este sistema tiene 6 grados de libertad y por lo tanto 6 coordenadas generalizadas independientes.

Consideremos que estas son las coordenadas del vector de posición del centro de masa,  $\mathbf{R}$ , mas las tres componentes del vector diferencia  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . La Lagrangiana del sistema tendrá entonces la forma:

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (1)$$

La energía cinética  $T$  es la suma de la energía cinética del movimiento del centro de masa mas la energía cinética del movimiento en torno al centro de masa,  $T'$ :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T',$$

siendo

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2.$$

Aquí  $\mathbf{r}_1'$  y  $\mathbf{r}_2'$  son los vectores de posición de las dos partículas relativas al centro de masa y están relacionadas con  $\mathbf{r}$  a través de

$$\mathbf{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad (2)$$

entonces  $T'$  toma la forma

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

y la Lagrangiana total dada por la ecuación (1) es:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots), \quad (3)$$

de donde definimos la masa reducida como

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Entonces nuestra ecuación (3) se puede escribir como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots).$$

De esta ecuación vemos que las coordenadas de  $\dot{\mathbf{R}}$  son cíclicas por lo que el centro de masa estará fijo o se moverá uniformemente.

Ahora, ninguna de las ecuaciones de movimiento para  $\mathbf{r}$  contendrá términos donde aparezca  $\mathbf{R}$  o  $\dot{\mathbf{R}}$ , este término de la ecuación es exactamente lo que tendríamos si tuviéramos un centro de fuerzas fijo (en el centro de masa) con una partícula a una distancia  $\mathbf{r}$  de él con masa  $\mu$  (masa reducida).

Así pues, el movimiento de dos cuerpos en torno a su centro de masa debido a una fuerza central se puede reducir siempre a un problema equivalente de un cuerpo.

## 2.2 Ecuaciones de movimiento.

Ahora nos limitaremos a fuerzas centrales conservativas, en donde el potencial es función solo de  $r$ ,  $V(r)$ , por lo que la fuerza solo estará dirigida a lo largo de  $\mathbf{r}$ . Ya vimos que para resolver el problema solo necesitamos considerar el problema de una partícula de masa  $m$  que se mueva en torno a un centro de fuerzas fijo, el cual será el origen del sistema de coordenadas. Como el potencial solo depende de  $r$ , el problema tiene simetría esférica, es decir, cualquier rotación, en torno a cualquier eje fijo, puede no tener efecto sobre la solución. Por tanto, una coordenada angular que represente rotación alrededor de un eje fijo debe de ser cíclica, lo cual da una simplificación considerable al problema. Debido a la simetría esférica el vector de momento angular total

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

se conserva. Se deduce, por tanto, que  $\mathbf{r}$  es perpendicular a la dirección fija de  $\mathbf{L}$ . Ahora si  $\mathbf{L} = 0$  el movimiento debe ser a lo largo de una recta que pase por el centro de fuerzas, ya que para  $\mathbf{L} = 0$   $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  son paralelas, cosa que solo se cumple en el movimiento rectilíneo, por tanto el movimiento bajo fuerza central es siempre un movimiento plano.

Ahora bien, tomando el eje  $z$  en dirección de  $\mathbf{L}$ , el movimiento tendrá siempre lugar en un plano normal al eje  $z$ . La coordenada esférica  $\phi$  tendrá entonces el valor constante  $\pi/2$  y podemos prescindir de ella en el estudio que sigue. La conservación del momento cinético proporciona 3 constantes de movimiento independientes. De hecho, dos de ellas, que expresan la *dirección* constante del momento cinético, se han utilizado para reducir el problema de 3 grados de libertad a dos. La tercera corresponde a la conservación del módulo de  $\mathbf{L}$ .

En coordenadas polares la Lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) . \quad (4)$$

como vimos  $\theta$  es coordenada cíclica cuya cantidad de momento canonico es el momento cinético

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} ,$$

entonces una de las dos ecuaciones de movimiento sera

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 , \quad (5)$$

lo que nos conduce a

$$mr^2\dot{\theta} = l = cte , \quad (6)$$

donde  $l$  es la magnitud constante del momento cinético. De la ecuación (5) se deduce tambien que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2\dot{\theta}}{2}\right) = 0. \quad (7)$$

Se introduce el termino  $1/2$  por la razón de que  $(r^2\dot{\theta})/2$  es la *velocidad areolar* (área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo).

La conservación del momento cinético es equivalente a decir que la velocidad areolar es constante. Tenemos aqui la demostración de la segunda ley de Kepler del movimiento planetario: el radio vector barre areas iguales en tiempos iguales. Sin embargo debemos recalcar que la constancia de la velocidad areolar es una propiedad de movimiento debido a una fuerza central y no esta limitada a una ley de fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

La ecuación de Lagrange restante, para la coordenada  $r$  es

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 . \quad (8)$$

Designando por  $f(r)$  el valor de la fuerza, podemos escribir la ecuación en la forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) . \quad (9)$$

Utilizando la ecuación (6), esta ecuación se puede reescribir como

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (10)$$

Basandonos en el teorema de la conservación de la energía

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) . \quad (11)$$

$E$  es una constante de movimiento. Esto lo podemos deducir de las ecuaciones de movimiento. La ecuación (10) la podemos escribir en la forma

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left[ V(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right] . \quad (12)$$

Ahora multipliquemos por  $\dot{r}$  ambos lados de la ecuación

$$m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left[ V(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right] ,$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right] = 0 .$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = cte \quad (13)$$

y ya que  $(l^2/2mr^2) = (mr^2\dot{\theta}^2/2)$ , la ecuación (13) se reduce a (11).

Ahora resolvamos las ecuaciones de movimiento para  $r$  y  $\theta$ . Despejando  $\dot{r}$  de la ecuación (13), tenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} , \quad (14)$$

o bien

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} . \quad (15)$$

Sea  $r_0$  el valor de  $r$  al tiempo  $t = 0$ . La integral de los 2 miembros de la ecuación toma la forma

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} . \quad (16)$$

Esta ecuación nos da  $t$  en función de  $r$  y de las constantes de integración  $E$ ,  $l$  y  $r_0$ . No obstante se puede invertir, al menos formalmente, para dar  $r$  en función de  $t$  y de las constantes. Una vez hallada  $r$ , se deduce inmediatamente  $\theta$  a partir de la ecuación (6), que se puede escribir

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2} . \quad (17)$$



Si  $\theta_0$  es el valor inicial de  $\theta$ , entonces (17) sera

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0. \quad (18)$$

Asi pues hemos ya obtenido las ecuaciones de movimiento para las variables  $r$  y  $\theta$ .

### 2.3 Ecuación diferencial de la órbita.

Al tratar detalles concretos de problemas de fuerzas centrales reales conviene efectuar un cambio en la orientación de nuestro tratamiento. Hasta ahora, resolver el problema significa hallar  $r$  y  $\theta$  en función del tiempo siendo  $E$ ,  $l$ , etc. constantes de integración. Pero muy a menudo, lo que realmente buscamos es la ecuación de la órbita, es decir, la dependencia entre  $r$  y  $\theta$ , eliminando el parámetro  $t$ . En el caso de problemas de fuerzas centrales, esta eliminación es particularmente sencilla ya que  $t$  solo figura en las ecuaciones de movimiento en forma de variable respecto a la cual se deriva. En verdad, una ecuación de movimiento, (6), no hace sino darnos la una relación definida entre una variación infinitesimal  $dt$  y la variación  $d\theta$  correspondiente

$$l dt = mr^2 d\theta. \quad (19)$$

La relación correspondiente entre sus derivadas respecto a  $t$  y  $\theta$  es

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (20)$$

Estas relaciones se pueden usar para convertir la ecuación (10) en una ecuación diferente para la órbita. También se pueden solucionar las ecuaciones de movimiento formalmente y llegar a la ecuación de la órbita. De momento continuemos con la primera posibilidad.

A partir de la ecuación (20) podemos escribir la segunda derivada con respecto a  $t$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{l}{mr^2} \left( \frac{d}{d\theta} \frac{l}{mr^2} \right)$$

y la ecuación de Lagrange para  $r$ , (10), queda en la forma

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l}{mr^3} = f(r). \quad (21)$$

Pero

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta}.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = 1/r$ , tenemos

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left( \frac{1}{u} \right). \quad (22)$$

Como

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dr} = -\frac{1}{u^2} \frac{d}{dr},$$

la ecuación (22) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V \left( \frac{1}{u} \right). \quad (23)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones (22) o (23) es la ecuación diferencial de la órbita si se conoce la fuerza  $f$  o el potencial  $V$ . Inversamente si conocemos la ecuación de la órbita podemos seguir los pasos inversos y obtener  $f$  o  $V$ . Para una ley de fuerza particular cualquiera, la ecuación de la órbita debe obtenerse integrando la ecuación (22) en una u otra forma. Puesto que ya se ha realizado la mayor parte del trabajo al resolver la ecuación (10), solo queda eliminar  $t$  de la solución (15) por medio de (19),

$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}, \quad (24)$$

o

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mU}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0. \quad (25)$$

Haciendo el cambio de variable  $u = 1/r$ ,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mU}{l^2} - u^2}}, \quad (26)$$

lo que es la solución formal para la ecuación de la órbita.

#### 2.4 Problema de Kepler: Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

La ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es la más importante de todas las leyes de fuerzas centrales por lo que le daremos un tratamiento detallado. En este caso la fuerza y el potencial son:

$$f = -\frac{k}{r^2} \quad y \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (27)$$

Para integrar la ecuación de la órbita sustituyamos (23) en (22),

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mf(1/u)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \quad (28)$$

Hacemos el cambio de variable  $y = u - \frac{mk}{l^2}$ , para que la ecuación diferencial quede en la forma

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

cuya solución es

$$y = B \cos(\theta - \theta'),$$

siendo  $B$  y  $\theta'$  las correspondientes constantes de integración. La solución en función de  $r$  es

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} [1 + e \cos(\theta - \theta')], \quad (29)$$

donde

$$e = B \frac{l^2}{mk}.$$

Podemos obtener la ecuación de la órbita a partir de la solución formal (26). A pesar de que este procedimiento es más largo que resolver la ecuación (28), resulta ilustrativo hacerlo ya que la constante de integración  $e$  se evalúa automáticamente en función de  $E$  y  $l$ .

Escribamos (26) en la forma

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mU}{l^2} - u^2}}, \quad (30)$$

donde ahora se trata de una integral indefinida. La cantidad  $\theta'$  que aparece en (30) es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales y no tiene por que ser el ángulo inicial  $\theta_0$  al tiempo  $t = 0$ . La solución a este tipo de integrales es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left[ -\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right], \quad (31)$$

donde

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Para aplicar este tipo de soluciones a la ecuación (30) debemos hacer

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1,$$

y el discriminante  $q$  sera por lo tanto

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right).$$

Con estas sustitucion (30) queda en la forma

$$\theta = \theta - \arccos \left[ \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt[2]{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right].$$

Despejando  $u \equiv 1/r$ , la ecuación de la órbita resulta ser

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[ 1 + \sqrt[2]{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta) \right]. \quad (32)$$

Comparando (32) con la ecuación (29) observamos que el valor de  $e$  es:

$$e = \sqrt[2]{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (33)$$

La naturaleza de la órbita depende del valor de  $e$  según el esquema siguiente:

$$\begin{aligned} e > 1, \quad E > 0 &: && \text{hipérbola,} \\ e = 1, \quad E = 0 &: && \text{parábola,} \\ e < 1, \quad E < 0 &: && \text{elipse,} \\ e = 0 \quad E = -\frac{mk^2}{2l^2} &: && \text{circunferencia.} \end{aligned}$$

## 2.5 Dispersión por un centro de fuerzas.

Desde un punto de vista histórico, el interés acerca de las fuerzas centrales surgio en los problemas astronómicos del movimiento planetario. Sin embargo, no hay razón alguna para que sólo las consideremos en este tipo de problemas. Otra cuestión que podemos estudiar mediante la Mecánica Clásica es la *dispersión* de partículas por campos de fuerzas centrales. Desde luego, si el tamaño de las partículas es del orden atómico, debemos esperar que los resultados específicos de un tratamiento clásico sean a menudo incorrectos desde un punto de vista físico, ya en que tales regiones suelen ser importantes los efectos cuánticos. A pesar de todo hay predicciones clásicas que siguen siendo válidas con buena aproximación. Más importante aún, los

procedimientos de *descripción* de los fenómenos de dispersión son los mismos en la Mecánica clásica que en la cuántica; podemos aprender a hablar el lenguaje igualmente bien basándonos en la Mecánica clásica.

En su formulación para un cuerpo, el problema de la dispersión se ocupa de la desviación de partículas por un *centro de fuerzas*. Consideremos un haz uniforme de partículas -da igual que sean electrones, protones o planetas- todas de igual masa y energía que inciden sobre un centro de fuerzas. Podemos suponer que la fuerza disminuye tendiendo a cero a grandes distancias. El haz incidente se caracteriza especificando su *intensidad*  $I$  (también llamada densidad de flujo), la cual da el número de partículas que atraviesan en unidad de tiempo la unidad de superficie colocada normalmente al haz. Al acercarse una partícula al centro de fuerzas será atraída o repelida y su órbita se desviará de la trayectoria rectilínea incidente. Después de haber pasado el centro de fuerzas, la fuerza que se ejerce sobre la partícula irá disminuyendo de manera que la órbita tenderá de nuevo a tener forma rectilínea. En general, la dirección final del movimiento no coincide con la incidente y diremos que la partícula se ha desviado o dispersado. Por definición la *sección eficaz*,  $\sigma(\Omega)$ , de *dispersión en una dirección dada* es

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{dN}{I}, \quad (34)$$

donde  $dN$  es el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo en un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  en la dirección  $\Omega$ . A menudo, a  $\sigma(\Omega)$  se le llama también *sección eficaz diferencial de dispersión*. En el caso de fuerzas centrales debe haber una simetría total en torno al eje del haz incidente, por lo que el elemento de ángulo sólido podrá escribirse en la forma

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta, \quad (35)$$

donde  $\Theta$  es el ángulo que forman las direcciones desviadas e incidentes, al cual se le da el nombre de *ángulo de dispersión*.

Para una partícula dada cualquiera, las constantes de la órbita y por lo tanto la magnitud de la dispersión, están determinadas por su energía y su momento cinético. Conviene expresar el momento cinético en función de la energía y de una cantidad  $s$  llamada *parámetro de impacto* que es, por definición, la distancia del centro de fuerzas a la recta soporte de la velocidad incidente. Si  $u_0$  es la velocidad incidente de la partícula, tendremos

$$l = mu_0 s = s \cdot \sqrt{2mE}. \quad (36)$$

Una vez fijadas  $E$  y  $s$ , queda determinado unívocamente el ángulo de dispersión  $\Theta$ . De momento supondremos que valores diferentes de  $s$  no pueden llevar un mismo ángulo de dispersión. Por tanto, el número de partículas dispersadas por un ángulo sólido  $d\Omega$  comprendido entre  $\Theta$  y  $\Theta + d\Theta$  deberá ser igual al número de partículas incidentes cuyo parámetro de impacto esté comprendido entre los valores correspondientes  $s$  y  $s + ds$ :

$$2\pi I s |ds| = 2\pi\sigma(\Theta)I \sin \Theta |d\Theta|. \quad (37)$$

En la ecuación (37) se han introducido los valores absolutos por que los números de partículas tiene que ser siempre positivos, mientras que  $s$  y  $\Theta$  varían a menudo en sentidos opuestos. Si consideramos  $s$  función de la energía y del ángulo de dispersión correspondiente,

$$s = s(\Theta, E),$$

la dependencia entre la sección eficaz diferencial y  $\Theta$  vendrá dada por

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|. \quad (38)$$

A partir de la ecuación de la órbita (25) se puede obtener directamente una expresión formal del ángulo de dispersión. También ahora, para mayor sencillez, consideraremos el caso de una dispersión puramente repulsiva. Como la órbita debe ser simétrica respecto a la dirección del periápside, el ángulo de dispersión vendrá dado por

$$\Theta = \pi - 2\Psi, \quad (39)$$

donde  $\Psi$  es el ángulo que forma la dirección de la asíntota incidente con la dirección del periápside. A su vez,  $\Psi$  puede obtenerse de la ecuación (25) haciendo  $r_0 = \infty$  cuando  $\theta_0 = \pi$  (dirección incidente), por consiguiente  $\theta = \pi - \Psi$  cuando  $r = r_m$ , distancia de mayor acercamiento. Fácilmente se llega a

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (40)$$

Expresando  $l$  en función del parámetro de impacto  $s$  (ec. (36)), resulta

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r \cdot \sqrt{r^2 \left[ 1 - \frac{V(r)}{E} \right] - s^2}}, \quad (41)$$

o bien

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{sdu}{\sqrt{1 - \frac{v(u)}{E} - s^2u^2}} . \quad (42)$$

Las ecuaciones (41) y (42) rara vez se utilizan, a no ser en el cálculo numérico directo del ángulo de dispersión. No obstante, cuando se disponga de una expresión analítica para las órbitas, se puede a menudo obtener una relación entre  $\Theta$  y  $s$  casi por simple inspección.

EJEMPLO:

Este ejemplo es históricamente muy importante. Se trata de la dispersión repulsiva de partículas cargadas por causa de un campo coulombiano. El campo de fuerzas dispersor es el creado por una carga fija  $-Ze$  al ejercerse sobre partículas incidentes que tienen carga  $-Ze$ ; por tanto, la fuerza se puede escribir en la forma

$$f = \frac{ZZe^2}{r^2} ,$$

es decir, se trata de una fuerza repulsiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Escribamos la constante

$$k = -ZZe^2 . \quad (43)$$

La energía  $E$  es mayor que cero y la órbita será una hipérbola de excentricidad dada por

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZe^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZe^2}\right)^2} , \quad (44)$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (36). Si se toma igual a  $\pi$  el ángulo  $\theta$  de la ecuación (29), el periápside corresponderá a  $\theta = 0$  y la ecuación de la órbita queda en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{mZZe^2}{l^2} [\epsilon \cos \theta - 1] . \quad (45)$$

La dirección  $\Psi$  de la asíntota de incidencia queda entonces determinada por la condición  $r \rightarrow \infty$ :

$$\cos \Psi = \frac{1}{\epsilon} ,$$

o sea, según la ecuación (39),

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon} .$$

Luego

$$\cot^2 \frac{\Theta}{2} = \epsilon^2 - 1,$$

y utilizando la ecuación (44)

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZe^2}.$$

La relación funcional buscada entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión será pues,

$$s = \frac{ZZe^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}, \quad (46)$$

de manera que efectuando la transformación que exige la ecuación (38), encontramos que  $\sigma(\Theta)$  viene dada por

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left( \frac{ZZe^2}{2E} \right)^2 \csc^4 \frac{\Theta}{2}. \quad (47)$$

La ecuación (47) da la famosa sección eficaz de dispersión de Rutherford, quien la dedujo para la dispersión de partículas  $\alpha$  por los núcleos atómicos. La mecánica cuántica da, en el límite no relativista, una sección eficaz coincidente con este resultado clásico.

En física atómica tiene mucha importancia el concepto de *sección eficaz total de dispersión*  $\sigma_T$  cuya definición es

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) d\Theta.$$

No obstante, si intentamos calcular la sección eficaz total para dispersión coulombiana sustituyendo la ecuación (47) en esta definición obtenemos un resultado infinito. La razón física de esto es fácil de ver. Según su definición, la sección eficaz total es el número de partículas que, por unidad de intensidad incidente, se dispersan en todas direcciones. Ahora bien, el campo coulombiano constituye un ejemplo de fuerza de «largo alcance»; sus efectos se extienden hasta el infinito. Las desviaciones muy pequeñas solo tienen lugar en el caso de partículas de parámetro de impacto muy grande. Por tanto, todas las partículas de un haz incidente de extensión lateral infinita se desviarían más o menos y deben de incluirse en la sección eficaz total de dispersión. Queda claro, pues, que el valor infinito de  $\sigma_T$  no es peculiar del campo coulombiano, tiene lugar en Mecánica clásica siempre que el campo



dispersor sea diferente de cero a todas las distancias independientemente de lo grande que sean.

#### BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

L.S. Brown, *Forces giving no orbit precession*, Am. J. Phys. 46, 930 (1978)

H. Goldstein, *More on the prehistory of the Laplace-Runge-Lenz vector*, Am. J. Phys. 44, 1123 (1976)

### 3. CUERPO RÍGIDO

**Prólogo:** Por las particularidades de su movimiento, el estudio del cuerpo rígido ha generado nuevas técnicas y procedimientos matemáticos interesantes.

**CONTENIDO:**

3.1 Definición.

3.2 Grados de libertad.

3.3 Tensor de inercia (con ejemplo).

3.4 Momento angular.

3.5 Ejes principales de inercia (con ejemplo).

3.6 El teorema de los ejes paralelos (con 2 ejemplos).

3.7 Dinámica del cuerpo rígido (con ejemplo).

3.8 Trompo simétrico libre de torcas.

3.9 Ángulos de Euler.

3.10 Trompo simétrico con un punto fijo.

### 3.1 Definición.

Un cuerpo rígido se define como un sistema de partículas cuyas distancias relativas están obligadas a permanecer absolutamente fijas.

### 3.2 Grados de libertad.

Para describir el movimiento general de un sólido rígido en el espacio tridimensional sólo requerimos de 6 cantidades, por ejemplo: las 3 coordenadas del centro de masa medidas desde un sistema inercial y 3 ángulos para especificar la orientación del sólido (o de un sistema fijo en el sólido con origen en el centro de masa) decimos que un cuerpo rígido en el espacio tiene 6 grados de libertad.

El número de grados de libertad puede ser menor en los casos en que el sólido está sujeto a restricciones, por ejemplo:

- Si el sólido sólo gira alrededor de un eje móvil es de un grado de libertad (basta con un ángulo).
- Si el sólido se mueve en el plano, su movimiento es más general requiere de 5 cantidades (2 grados de libertad traslacional y 3 grados de libertad rotacional).

### 3.3 Tensor de inercia.

Consideremos que el cuerpo constituido por  $N$  partículas de masas  $m_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$ . Si el cuerpo rota con velocidad angular  $\omega$  alrededor de un punto fijo del cuerpo, y este punto a su vez se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$  respecto al sistema fijo (inercial), entonces la velocidad de la  $\alpha$ -ésima partícula respecto al sistema inercial está dada por

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha. \quad (1)$$

La energía cinética de la  $\alpha$ -ésima partícula es

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2, \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{v}_\alpha^2 = \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha = (\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha) \cdot (\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot (\omega \times \mathbf{r}_\alpha) + (\omega \times \mathbf{r}_\alpha) \cdot (\omega \times \mathbf{r}_\alpha) \\ &= \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\omega \times \mathbf{r}_\alpha) + (\omega \times \mathbf{r}_\alpha)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Entonces la energía total es

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 ; \\ T &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + \mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 . \end{aligned}$$

Si el origen esta fijo al sólido lo elegimos en el centro de masas, entonces

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{M} = 0,$$

por lo que

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 \quad (5)$$

$$T = T_{trans} + T_{rot} \quad (6)$$

donde

$$T_{trans} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 \quad (7)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 . \quad (8)$$

Ahora usaremos en la ecuación (8) la identidad vectorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \quad (9)$$

entonces la ecuación nos queda en la forma

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2]$$

que en términos de las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{r}$

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \left( \sum_i \omega_i^2 \right) \left( \sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - \left( \sum_i \omega_i x_{\alpha i} \right) \left( \sum_j \omega_j x_{\alpha j} \right) \right\} .$$

Ahora introducimos

$$\omega_i = \sum_j \delta_{ij} \omega_j$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{ij} m_{\alpha} \left\{ \omega_i \omega_j \delta_{ij} \left( \sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right\} \quad (10)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right]. \quad (11)$$

Podemos escribir  $T_{rot}$  como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (12)$$

donde

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right]. \quad (13)$$

Las 9 cantidades de  $I_{ij}$  constituyen las componentes de de una nueva cantidad matemática que denotamos por  $\{I_{ij}\}$  y se llama *Tensor de Inercia*,  $\{I_{ij}\}$  se puede escribir convenientemente mediante un arreglo matricial de  $(3 \times 3)$

$$\begin{aligned} \{I_{ij}\} &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 1} x_{\alpha 2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 1} x_{\alpha 3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 2} x_{\alpha 1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 2} x_{\alpha 3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 3} x_{\alpha 1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha 3} x_{\alpha 2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Podemos notar que  $I_{ij} = I_{ji}$  por lo tanto  $\{I_{ij}\}$  es un *tensor simétrico*, por lo tanto solo hay 6 términos independientes. Los elementos diagonales de  $\{I_{ij}\}$  se llaman *momentos de inercia* con respecto a los ejes de coordenadas, los negativos de los elementos no diagonales se llaman *productos de inercia*. Para una distribución continua de masa de densidad  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\{I_{ij}\}$  se escribe en lugar de (13) como

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[ \delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dV. \quad (15)$$

**EJEMPLO:**

Calcular los elementos  $I_{ij}$  del tensor de inercia  $\{I_{ij}\}$  para un cubo uniforme de lado  $b$ , masa  $M$ , una esquina esta en el origen.

$$I_{11} = \int_V \rho \left[ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_1 \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \int_0^b \int_0^b \int_0^b (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 .$$

El resultado de la integral tres dimensional es  $I_{11} = \frac{2}{3}(\rho b^3)^2 = \frac{2}{3}Mb^2$ .

$$I_{12} = \int_V \rho(-x_1x_2)dV = -\rho \int_0^b \int_0^b \int_0^b (x_1x_2)dx_1dx_2dx_3 = -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4}Mb^2 .$$

Vemos que las demas integrales son las mismas por lo que

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}Mb^2$$

$$I_{ij} = -\frac{1}{4}Mb^2 , \quad i \neq j$$

entonces la matriz queda de la forma

$$\{I_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{pmatrix} .$$

### 3.4 Momento angular.

El momento angular para el sólido rígido constituido por  $N$  partículas  $m_\alpha$  esta dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} , \quad (16)$$

donde

$$\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} = m_{\alpha}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (17)$$

Sustituyendo (17) en la ecuación (16), tenemos que

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) .$$

Utilizando la identidad vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} = \mathbf{A}^2\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} ,$$

tenemos

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{\alpha}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})) .$$

Tomando la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{L}$

$$L_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \omega_i \sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - x_{\alpha i} \left( \sum_j x_{\alpha j} \omega_j \right) ,$$

introduciendo la ecuación

$$\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij} ,$$

obtenemos

$$L_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \sum_j \delta_{ij} \omega_j \sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - \left( \sum_j x_{\alpha j} x_{\alpha j} \omega_j \right) \quad (18)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_j \omega_j \delta_{ij} \left( \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \quad (19)$$

$$= \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) . \quad (20)$$

Comparando con la ecuación (13)

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j . \quad (21)$$

Esta ecuación también se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L} = \{I_{ij}\} \boldsymbol{\omega} , \quad (22)$$

o

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} . \quad (23)$$

La energía cinética rotacional,  $T_{rot}$ , se puede relacionar con el momento angular de la siguiente manera: multipliquemos la ecuación (21) por  $\frac{1}{2}\omega_i$

$$\omega_i \frac{1}{2} L_i = \frac{1}{2} \omega_i \sum_j I_{ij} \omega_j , \quad (24)$$

sumando sobre todas las  $i$  da

$$\sum_i \frac{1}{2} L_i \omega_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j .$$

Al comparar esta ecuación con (12), vemos que el segundo término no es más que  $T_{rot}$ , por lo tanto

$$T_{rot} = \sum_I \frac{1}{2} L_i \omega_i = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} . \quad (25)$$

Ahora, sustituimos (22) en la ecuación (25), obtenemos una relación entre la  $T_{rot}$  y el tensor de inercia

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \{I_{ij}\} \cdot \boldsymbol{\omega} . \quad (26)$$

### 3.5 Ejes principales de inercia.

Consideremos que el tensor de inercia  $\{I_{ij}\}$  es diagonal, es decir  $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$ , la energía cinética rotacional y el momento angular quedarían expresadas en la siguiente forma

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta_{ij} I_i \omega_i \omega_j \\ T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \end{aligned} \quad (27)$$

y el momento angular

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_j I_{ij} \omega_j \\ &= \sum_j \delta_{ij} I_i \omega_j = I_i \omega_i \\ \mathbf{L} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (28)$$

Encontrar una expresión diagonal para  $\{I_{ij}\}$  equivale a encontrar un nuevo sistema de 3 ejes, en los cuales la energía cinética y el momento angular se reducen a las expresiones (27) y (28), tales ejes se les llama *Ejes Principales de Inercia*, es decir dado un cierto sistema inicial de coordenadas en el cuerpo, podemos pasar de él a los ejes principales mediante una transformación ortogonal particular que, en consecuencia, se llama *transformación a los ejes principales*.

Igualando las componentes de (22) y (28), tenemos

$$L_1 = I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \quad (29)$$

$$L_2 = I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \quad (30)$$

$$L_3 = I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3, \quad (31)$$

las cuales son un conjunto de ecuaciones que se pueden reescribir

$$(I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0 \quad (32)$$

$$I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0$$

$$I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 = 0.$$



Para obtener la solución, el determinante del sistema debe ser cero

$$\begin{vmatrix} (I_{11} - I)\omega_1 & I_{12}\omega_2 & I_{13}\omega_3 \\ I_{21}\omega_1 & (I_{22} - I)\omega_2 & I_{23}\omega_3 \\ I_{31}\omega_1 & I_{32}\omega_2 & (I_{33} - I)\omega_3 \end{vmatrix} = 0 . \quad (33)$$

El desarrollo de este determinante es un polinomio de grado 3 en  $I$ , llamado *polinomio característico* y la ecuación (33) se llama *ecuación secular* o *ecuación característica*. En la práctica, los momentos principales de inercia, por ser los valores propios de  $\mathbf{I}$ , se hallan buscando las raíces de la ecuación secular.

**EJEMPLO:**

Determinar los ejes principales de inercia para el cubo del ejemplo anterior.

Al sustituir los valores obtenidos en el ejemplo anterior en la ecuación (33) obtenemos:

$$\left| \begin{pmatrix} (\frac{2}{3}\beta - I) & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & (\frac{2}{3}\beta - I) & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & (\frac{2}{3}\beta - I) \end{pmatrix} \right| = 0 ,$$

donde  $\beta = Mb^2$ , de donde obtenemos la característica,

$$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right) \left(\frac{11}{12}\beta - I\right) \left(\frac{1}{6}\beta - I\right) = 0 ,$$

entonces los eigenvalores o momentos principales de inercia son:

$$I_1 = \frac{1}{6}\beta, \quad I_2 = I_3 = \frac{11}{12}\beta ,$$

cuyos correspondientes eigenvalores son:

$$I = \frac{1}{6}\beta \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I_2, I_3 = \frac{11}{12}\beta \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Entonces la matriz que diagonaliza a  $\{I_{ij}\}$  es:

$$\lambda = \sqrt[2]{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt[2]{\frac{3}{2}} & -\sqrt[2]{\frac{3}{2}} \\ 1 & \sqrt[2]{\frac{3}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt[2]{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} .$$

$\{I_{ij}\}$  diagonalizado es:

$$\{I_{ij}\}_{diag} = (\lambda)^* \{I_{ij}\} \lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\beta \end{pmatrix} .$$

### 3.6 El teorema de los ejes paralelos.

Supongamos que el sistema  $x_1, x_2, x_3$  tiene su origen en el centro de masas del cuerpo rígido. Un segundo sistema  $X_1, X_2, X_3$ , tiene su origen en otra posición diferente al sistema anterior. la unica condición es que sean paralelos, definamos los vectores  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$  y  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , de tal manera que  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{a}$  o en términos de sus componentes

$$X_i = x_i + a_i. \quad (34)$$

Sean  $J_{ij}$  las componentes del tensor de inercia respecto al sistema  $X_1 X_2 X_3$ ,

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k X_{\alpha k}^2 - X_{\alpha i} X_{\alpha j} \right] . \quad (35)$$

Sustituimos (34) en (35),

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha k} + a_k)^2 - (x_{\alpha i} + a_i)(x_{\alpha j} + a_j) \right] \\ &= \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha k})^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}) \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j) \\ &\quad + \left[ \sum_k 2a_k \delta_{ij} (\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha k}) - a_j (\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha j}) - a_i (\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i}) \right] . \end{aligned} \quad (36)$$

Pero la coordenada del centro de masa se define como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}}{M}$$

y como habiamos dicho antes, el origen esta en el centro de masa

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0, 0) .$$

Ahora si tambien comparamos primer término de (36) con la ecuación (13), tendremos:

$$J_{ij} = I_{ij} + M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad (37)$$

y entonces los elementos del tensor de inercia  $I_{ij}$  para el sistema del centro de masa estarán dadas por:

$$I_{ij} = J_{ij} - M(\delta_{ij}a^2 - a_i a_j) . \quad (38)$$

Este es el *Teorema de los Ejes Paralelos*.

EJEMPLO:

Calcular  $I_{ij}$  para el cubo anterior respecto a un sistema paralelo al primer eje y con origen en el centro de masa.

Ya sabemos del ejemplo anterior que:

$$\{J_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} .$$

Ahora el vector  $\mathbf{a} = (\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2})$  y  $a^2 = \frac{3}{4}b^2$ , entonces usando la ecuación (38) y el hecho que  $\beta = Mb^2$  tenemos,

$$I_{11} = J_{11} - M(a^2 - a_1^2) = \frac{1}{6}Mb^2 \quad (39)$$

$$I_{22} = J_{22} - M(a^2 - a_2^2) = \frac{1}{6}Mb^2 \quad (40)$$

$$I_{33} = J_{33} - M(a^2 - a_3^2) = \frac{1}{6}Mb^2 \quad (41)$$

$$I_{12} = J_{12} - M(-a_1 a_2) = 0 \quad (42)$$

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 , \quad (43)$$

por lo tanto

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{pmatrix} .$$

EJEMPLO:

Consideremos el caso en el que el vector  $\mathbf{a} = (0, \frac{b}{2}, \frac{b}{2})$  y  $a^2 = \frac{b^2}{2}$ , entonces nuestro nuevo tensor de inercia sería:

$$I_{11} = J_{11} - M(a^2 - a_1^2) = \left(\frac{2}{3}Mb^2\right) - M\left(\frac{b^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{6}Mb^2 \quad (44)$$

$$I_{22} = J_{22} - M(a^2 - a_2^2) = \left(\frac{2}{3}Mb^2\right) - M\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{5}{12}Mb^2 \quad (45)$$

$$I_{33} = J_{33} - M(a^2 - a_3^2) = \left(\frac{2}{3}Mb^2\right) - M\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{5}{12}Mb^2 \quad (46)$$

$$I_{12} = J_{12} - M(-a_1 a_2) = \left(-\frac{1}{4}Mb^2\right) - M(0) = -\frac{1}{4}Mb^2 \quad (47)$$

$$I_{13} = J_{13} - M(-a_1 a_3) = \left(-\frac{1}{4}Mb^2\right) - M(0) = -\frac{1}{4}Mb^2 \quad (48)$$

$$I_{23} = J_{23} - M(-a_2 a_3) = \left(-\frac{1}{4}Mb^2\right) - M\left(\frac{1}{4}Mb^2\right) = 0, \quad (49)$$

entonces  $\{I_{ij}\}$  es igual a:

$$\{I_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{5}{12}Mb^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & 0 & \frac{5}{12}Mb^2 \end{pmatrix}.$$

### 3.7 Dinámica del cuerpo rígido.

La razón de cambio respecto al tiempo del momento angular  $\mathbf{L}$  esta dado por:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{inercial} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (50)$$

Para la descripción desde el sistema fijo al sólido debemos usar la identidad operadora

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{cuerpo} + \boldsymbol{\omega} \times . \quad (51)$$

Aplicando este operador a la ecuación (50)

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{cuerpo} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}. \quad (52)$$

Entonces, en lugar de la ecuación (50) tendremos

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{cuerpo} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (53)$$

Ahora proyectamos la ecuación (53) sobre los ejes principales de inercia, supongamos que estos son  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $T_{rot}$  y  $\mathbf{L}$  se simplifican con tal elección, por ejemplo:

$$L_i = I_i \omega_i \quad (54)$$

la componente  $i$ -ésima de (53) es

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i. \quad (55)$$

Ahora proyectando sobre los ejes principales de inercia y utilizando la ecuación (54), la ecuación (55) toma la forma:

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = N_i \quad (56)$$

ya que los elementos principales de inercia son independientes del tiempo. Entonces, así obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3 . \end{aligned} \quad (57)$$

Estas son las llamadas *Ecuaciones de Euler*.

EJEMPLO:

Rodamiento y deslizamiento de una bola de billar. Demostrar que después de un golpe horizontal la bola se desliza resbalando una distancia

$$x_1 = \frac{12u_0^2}{49\mu g} ,$$

para después empezar a rodar sin resbalar al tiempo

$$t_1 = \frac{2u_0}{7\mu g} .$$

Al cesar la fuerza impulsiva las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & \dot{x}_0 &= u_0 \\ \phi &= 0, & \dot{\phi} &= 0 . \end{aligned}$$

La fuerza de fricción es

$$\mathbf{F}_f = -\mu g \hat{\mathbf{e}}_1 ,$$

entonces la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} = -\mu g M. \quad (58)$$

La ecuación para  $\mathbf{L}$  es

$$\frac{dL_3}{dt} = I_3 \ddot{\phi} = N_3 \quad (59)$$

donde  $I_3$  es

$$I_3 = \int \rho(\mathbf{r}) [x_1^2 - x_2^2] dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{2}{5} M a^2$$

y

$$N_3 = F_f a = \mu M g a .$$

Sustituyendo en la ecuación (59), tenemos

$$a\ddot{\phi} = \frac{5}{2}\mu g. \quad (60)$$

Ahora integrando las ecuaciones (58) y (60) una sola vez

$$\dot{x} = -\mu g t + C_1 \quad (61)$$

$$a\dot{\phi} = \frac{5}{2}\mu g t + C_2 \quad (62)$$

y aplicandoles las condiciones iniciales, tales ecuaciones quedan en la forma

$$\dot{x}(t) = -\mu g t + u_0 \quad (63)$$

$$a\dot{\phi}(t) = \frac{5}{2}\mu g t. \quad (64)$$

Para que haya rodamiento puro, sin fricción se necesita que

$$\dot{x}(t) = a\dot{\phi}(t). \quad (65)$$

De la ecuación (64) y (65) evaluadas en  $t_1$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\mu g t_1 &= -\mu g t_1 + u_0 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{2u_0}{7\mu g}. \end{aligned} \quad (66)$$

Ahora integrando de nuevo la ecuación (63) y aplicando las condiciones iniciales tenemos que

$$x(t) = -\mu g \frac{t^2}{2} + u_0 t. \quad (67)$$

Evaluando la ecuación (67) y (63) en el tiempo  $t_1$

$$x = \frac{12u^2}{49\mu g}$$

$$\dot{x} = \frac{5}{7}u_0 .$$

### 3.8 Trompo simétrico libre de torcas.

Un trompo simétrico es cualquier sólido de revolución. Si los momentos de inercia son

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{trompo esférico}$$

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad \text{trompo simétrico}$$

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \quad \text{trompo asimétrico.}$$

Tomemos el caso del trompo simétrico  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , en este caso el eje  $X_3$  es el eje de simetría. Las ecuaciones de Euler proyectadas sobre los ejes principales de inercia son:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1 \quad (68)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = N_2 \quad (69)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3. \quad (70)$$

Como el sistema que estamos considerando esta libre de torcas

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0 , \quad (71)$$

utilizando el hecho que  $I_1 = I_2$  en la ecuación (71), obtenemos

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0 \quad (72)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0 \quad (73)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0. \quad (74)$$

La ecuación (74) implica que

$$\omega_3 = cte.$$

Las ecuaciones (72) y (73) las reescribimos como:

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2 \quad \text{donde } \Omega = \omega_3 \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \quad (75)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\Omega\omega_1 . \quad (76)$$

Multiplicando la ecuación (76) por  $i$  y sumandola a la ecuación (75), tenemos

$$\begin{aligned}(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) &= -\Omega(\omega_2 - i\omega_1) \\(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) &= i\Omega(\omega_1 + i\omega_2).\end{aligned}$$

Sea  $\eta(t) = \dot{\omega}_1(t) + i\dot{\omega}_2(t)$  entonces

$$\dot{\eta}(t) - i\Omega\eta(t) = 0 ,$$

cuya solución es

$$\eta(t) = A \exp(i\Omega t) .$$

Esto implica que

$$(\omega_1 + i\omega_2) = A \cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t) ,$$

entonces

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t) \tag{77}$$

$$\omega_2 = A \sin(\Omega t). \tag{78}$$

La magnitud del vector  $\omega$  es

$$\omega = \|\omega\| = \sqrt[3]{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt[3]{A^2 + \omega_3^2} = cte ,$$

esto significa que la magnitud de  $\omega$  no cambia en el tiempo. Este vector realiza un movimiento de precesión y la frecuencia de precesión esta dada por

$$\Omega = \omega_3 \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) ,$$

además notamos que  $\Omega$  es constante.

Si le llamamos  $\lambda$  al ángulo entre  $\omega$  y  $X_3$  las ecuaciones (77) y (78) toman la forma

$$\omega_1 = \omega \sin \lambda \cos(\Omega t)$$

$$\omega_2 = \omega \sin \lambda \sin(\Omega t)$$

$$\omega_3 = \omega \cos \lambda ,$$

donde  $A = \omega \sin \lambda$ .

Para un sólido de revolución achatado  $I_1 = I_2 = I_{12}$  y  $I_3 > I_1$ . Para el caso de la tierra

$$\Omega_{\oplus} = \omega_3 \left( \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \right) \simeq \frac{\omega_3}{305}.$$



Las observaciones indican un valor promedio de 14 meses  $\simeq$  450 días. (Esto se debe a que no es un sólido estrictamente, su estructura interna es líquida).

### 3.9 Angulos de Euler.

Como sabemos una rotación se puede representar por una matriz de rotación  $\lambda$  a través de la ecuación

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' . \quad (79)$$

$\mathbf{x}$  representa el conjunto de ejes del sistema rotado con respecto al sistema cuyos ejes representamos por  $\mathbf{x}'$ . La rotación  $\lambda$  puede llevarse a cabo por una sucesión de rotaciones “parciales”  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ . Existen muchas posibilidades para elegir estas  $\lambda$ 's. Una de ellas es el conjunto de ángulos  $\phi, \theta$  y  $\varphi$  llamados *ángulos de Euler*, los cuales se generan a través de la siguiente serie de rotaciones:

- Una rotación alrededor del eje  $X'_3$  en un ángulo  $\varphi$  (en sentido positivo). La matriz asociada a ésta rotación es:

$$\lambda_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Una rotación un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $X'_1$  (sentido positivo). La matriz asociada es:

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

- Una rotación en un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $X'_3$  (sentido positivo), la matriz asociada a esta rotación es:

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La transformación completa del sistema de ejes  $\{X'_1, X'_2, X'_3\}$  al sistema con ejes  $\{X_1, X_2, X_3\}$  está dada por (79), donde

$$\lambda = \lambda_\phi \lambda_\theta \lambda_\varphi .$$

Haciendo el producto de matrices

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \cos \varphi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \varphi \\
 \lambda_{21} &= -\sin \varphi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \varphi \\
 \lambda_{31} &= \sin \theta \sin \phi \\
 \lambda_{12} &= \cos \varphi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \varphi \\
 \lambda_{22} &= -\sin \varphi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \varphi \\
 \lambda_{32} &= -\sin \varphi \cos \phi \\
 \lambda_{13} &= \sin \varphi \cos \phi \\
 \lambda_{23} &= \cos \varphi \sin \theta \\
 \lambda_{33} &= \cos \theta
 \end{aligned}$$

donde

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos el hecho de que:

- $\dot{\phi}$  está dirigida a lo largo del eje  $X_3$  (fijo).
- $\dot{\theta}$  está dirigido a lo largo de la *línea de nodo*.
- $\dot{\varphi}$  está dirigido a lo largo del eje  $X_3$  (cuerpo).

Podemos escribir 3 componentes de cada uno de los 3 vectores en el sistema  $\{X_1, X_2, X_3\}$  como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \varphi, & \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta} \cos \varphi & \dot{\varphi}_1 &= 0 \\
 \dot{\phi}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \varphi, & \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta} \sin \varphi & \dot{\varphi}_2 &= 0 \\
 \dot{\phi}_3 &= \dot{\phi} \cos \theta, & \dot{\theta}_3 &= 0 & \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \omega &= \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi} \\
 &= \left[ (\dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1), (\dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\varphi}_2), (\dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\varphi}_3) \right].
 \end{aligned}$$

Entonces las componentes de  $\omega$  son:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

### 3.10 Trompo simétrico con un punto fijo.

Como ejemplo mas complicado de la aplicación de los métodos de la dinámica del cuerpo rígido, vamos a considerar el movimiento de un cuerpo simétrico en un campo gravitacional uniforme cuando un punto del eje de simétria esté fijo en el espacio.

El eje de simétria es, desde luego, uno de los ejes principales y lo tomaremos como el eje  $z$  del sistema de coordenadas solidario al cuerpo. Como hay un punto fijo, la configuración del trompo quedará determinada por los tres ángulos de Euler:  $\theta$  da la inclinación del eje  $z$  respecto a la vertical,  $\phi$  mide el acimut del trompo respecto a la vertical, mientras que  $\varphi$  es el ángulo de rotación del trompo respecto a su propio eje  $z$ . La distancia del centro de gravedad al punto fijo será representada por  $l$ . para obtener una solución del movimiento del trompo vamos a utilizar el método de Lagrange en vez de las ecuaciones de Euler.

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 ,$$

o bien, en función de los ángulos de Euler

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 ,$$

donde han desaparecido los términos en los que figuraban  $\omega_1^2$  y  $\omega_2^2$ . Conocemos un teorema elemental según el cual en un campo gravitatorio constante la energía potencial es la misma que se tendría si el cuerpo estuviera concentrado en su centro de masa, pero vamos a dar una demostración formal del mismo. La energía potencial del cuerpo es la suma extendida de todas sus partículas:

$$V = -m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g} , \quad (80)$$

donde  $\mathbf{g}$  es el vector constante que representa la aceleración de la gravedad, según como se define el centro de masa, esto es equivalente a

$$V = -M \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{g}, \quad (81)$$

lo que demuestra el teorema. La energía potencial en función de los ángulos de Euler es:

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (82)$$

con lo que la Lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 - Mgl \cos \theta. \quad (83)$$

Notamos que  $\phi$  y  $\varphi$  son coordenadas cíclicas, por lo tanto  $p_\phi$  y  $p_\varphi$  son constantes del movimiento.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_3(\dot{\varphi} + \dot{\phi} \cos \theta) = cte \quad (84)$$

y

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\phi} \cos^2 \theta + \dot{\varphi} \cos \theta) = cte. \quad (85)$$

De la ecuación (84) despejamos  $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3}, \quad (86)$$

sustituimos en la ecuación (85)

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\phi} \cos^2 \theta + \frac{p_\varphi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3} \cos \theta) = cte \\ p_\phi &= I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\varphi \cos \theta, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\varphi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (87)$$

Sustituyendo en (86)

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I_3} - \frac{p_\phi - p_\varphi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (88)$$

Ahora, como el sistema es conservativo, otra constante de movimiento es la energía.

$$E = T + V = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 + Mgl \cos \theta.$$

La cantidad  $I_3\omega_3 = p_\varphi$  es una constante de movimiento, multiplicando esta constante por  $p_\varphi\omega_3$  se obtiene

$$\begin{aligned} I_3 p_\varphi \omega_3^2 &= p_\varphi^2 \omega_3 \\ I_3^2 \omega_3^3 &= p_\varphi^2 \omega_3 \\ \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 &= \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{I_3} . \end{aligned}$$

La cantidad  $\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$  es una constante, entonces podemos definir la cantidad

$$\begin{aligned} E' &= E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = cte \\ &= \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + Mgl \cos \theta , \end{aligned}$$

de donde identificamos

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + Mgl \cos \theta \\ V(\theta) &= \frac{1}{2}I_1 \left( \frac{p_\phi - p_\varphi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta + Mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (89)$$

Entonces  $E'$  es:

$$E' = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V(\theta) .$$

De esta ecuación despejamos  $\dot{\theta}$  e integramos para obtener

$$\dot{\theta} = \left[ \frac{2}{I_1} (E' - V(\theta)) \right]^{1/2} = \frac{d\theta}{dt} ,$$

de donde obtenemos

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{2}{I_1}\right) (E' - V(\theta))}} . \quad (90)$$

Al realizar la integral de la ecuación (90) se obtiene  $t = f(\theta)$ , de donde en principio podemos despejar y obtener  $\theta(t)$ . Entonces  $\theta(t)$  se sustituye en las ecuaciones para  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\varphi}$  (ecs. (87) y (88)) y al integrarlas obtenemos la solución completa a nuestro problema.

## Bibliografía.

- H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, (Reverté, 1992).
- L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*, (Reverté, 1969).
- J. B. Marion, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*, (Reverté, 1995).
- W. Wrigley & W.M. Hollister, *The Gyroscope: Theory and application*, Science 149, 713 (Aug. 13, 1965).

## 4. OSCILACIONES PEQUEÑAS.

**Prólogo:** Una forma muy común de movimiento en los sistemas mecánicos, son las pequeñas oscilaciones. Estas las encontramos en sistemas tales como vibraciones atómicas, moleculares, circuitos eléctricos, acústica. Todo movimiento alrededor de las posiciones de equilibrio estable, es el llamado vibratorio.

### **CONTENIDO:**

4.1 OSCILADOR ARMONICO SIMPLE.

4.2 OSCILADOR ARMONICO FORZADO.

4.3 OSCILADORES ARMONICOS AMORTIGUADOS.

4.4 MODOS NORMALES.

4.5 RESONANCIA PARAMETRICA.

## 4.1 OSCILADOR ARMONICO SIMPLE.

Un sistema se encuentra en equilibrio estable cuando su energía potencial  $U(q)$  es mínima; al separarlo de esta posición se origina una fuerza  $-dU/dq$  que tiende a devolver al sistema al equilibrio. Sea  $q_0$  el valor de la coordenada generalizada correspondiente a la posición de equilibrio. Al desarrollar  $U(q) - U(q_0)$  en serie de potencias de Taylor de  $q - q_0$  para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 ,$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q} &= 0 \\ U(q) &= 0 , \end{aligned}$$

es decir: no hay fuerzas externas que actúan sobre el sistema y se ha escogido el nivel de referencia de tal modo que coincide con la posición de equilibrio; además de despreciar terminos de orden superior. El coeficiente  $k$  representa el valor de la segunda derivada  $U(q)$  para  $q=q_0$ . Por simplificación haremos la siguiente designación

$$x = q - q_0$$

con lo que la ecuación de energía potencial toma la forma:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 . \quad (1)$$

La energía cinética de un sistema es en general de la forma

$$T = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 \quad (2)$$

con (1) y (2) obtenemos la expresión para la Lagrangiana de un sistema que realiza oscilaciones lineales (a tal sistema se le llama frecuentemente oscilador lineal):

$$L = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 . \quad (3)$$

La ecuación de movimiento correspondiente a esta  $L$  es:



$$m \ddot{x} + kx = 0 ,$$

o bien

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 , \tag{4}$$

donde  $w^2 = \sqrt{k/m}$ . La ecuación diferencial tiene dos soluciones independientes:  $\cos wt$  y  $\text{sen}wt$ , así, formamos la solución general:

$$x = c_1 \cos wt + c_2 \text{sen}wt , \tag{5}$$

o bien, podemos expresar la solución de la forma:

$$x = a \cos(wt + \alpha) . \tag{6}$$

Puesto que  $\cos(wt + \alpha) = \cos wt \cos \alpha - \text{sen}wt \text{sen} \alpha$ , la comparación con (5) muestra que las constantes arbitrarias  $a$  y  $\alpha$  están relacionadas con los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  de la forma:

$$a = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)}, \quad \text{y} \quad \tan \alpha = -c_1/c_2 .$$

Así: un sistema en las proximidades de su posición de equilibrio estable, ejecuta un movimiento oscilatorio armónico. El coeficiente  $a$  en (6) es la amplitud de las oscilaciones, y el argumento del coseno su fase;  $\alpha$  es el valor inicial de la fase, y depende evidentemente de la elección del origen de tiempos. La magnitud  $w$  es la frecuencia angular de las oscilaciones, esta no depende de las condiciones iniciales del sistema por lo cual es la característica fundamental de las oscilaciones.

A menudo la solución es expresada de la forma

$$x = r e [A \exp(iwt)]$$

donde  $A$  es la amplitud compleja, su modulo es la amplitud ordinaria:

$$A = a \exp(i\alpha) .$$

La energía de un sistema que realiza pequeñas oscilaciones es:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 ,$$

o sustituyendo (6)

$$E = \frac{1}{2}mw^2a^2 .$$

Ahora, consideremos el caso para un número  $n$  de grados de libertad. En este caso seguiremos considerando que la suma de las fuerzas que actúan es cero, con lo que

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 . \quad (7)$$

Procediendo de igual forma que en el caso de un sólo grado de libertad, realizamos una expansión en series de Taylor para la energía potencial donde ahora consideramos un mínimo para  $q_i = q_{i0}$ . Introduciendo pequeños desplazamientos

$$x_i = q_i - q_{i0} ,$$

al realizar la expansión en series

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}) + \sum \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2!} \sum \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 x_i x_j + \dots \quad (8)$$

Bajo las mismas consideraciones que se hicieron en (1), llegamos a la siguiente relación:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j . \quad (9)$$

De la ecuación (8) se puede notar que  $k_{ij} = k_{ji}$ , es decir son simétricos con respecto a sus índices. Ahora consideremos la situación para la energía cinética. Esta en general es de la forma

$$\frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{x}_i \dot{x}_j ,$$

donde las  $a_{ij}$  sólo son funciones de las coordenadas. Al designar estas  $a_{ij} = m_{ij}$  la energía cinética es de la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j . \quad (10)$$

Una vez conociendo las energías tenemos que la Lagrangiana para sistemas con  $n$  grados de libertad es de la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j) . \quad (11)$$

Esta Lagrangiana lleva a las ecuaciones diferenciales de movimientos simultáneas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

o bien

$$\sum (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 . \quad (13)$$

Tenemos así un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas, las cuales pueden ser consideradas como las  $n$  componentes de la ecuación matricial

$$(M)(\ddot{X}) + (K)(X) = 0 , \quad (14)$$

donde las matrices están definidas por:

$$(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$(\ddot{X}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \quad (18)$$

De manera analógica al sistema con un grado de libertad, busquemos  $n$  funciones incógnitas  $x_j(t)$  de la forma

$$x_j = A_j \exp(i\omega t) , \quad (19)$$

siendo  $A_j$  constantes a determinar. Sustituyendo (19) en (13) y dividiendo todo entre  $\exp(i\omega t)$ , se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas, a las que deben satisfacer  $A_j$ .

$$\sum_j (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0 . \quad (20)$$

Para que este sistema tenga soluciones distintas de cero, el determinante de sus coeficientes debe anularse.

$$\left| k_{ij} - \omega^2 m_{ij} \right|^2 = 0 . \quad (21)$$

Esta es la ecuación característica y es de grado  $n$  con respecto a  $\omega^2$ . En general, tiene  $n$  raíces distintas reales y positivas  $\omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Las magnitudes  $\omega_\alpha$  se llaman frecuencias propias del sistema. Multiplicando por  $A_i^*$  y sumando sobre  $i$  se tiene

$$\sum_j (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_i^* A_j = 0 ,$$

de donde

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ij} A_i^* A_j}{\sum m_{ij} A_i^* A_j} .$$

Como los coeficientes  $k_{ij}$  y  $m_{ij}$  son reales y simétricos, las formas cuadráticas del numerador y denominador de esta expresión son reales, y al ser esencialmente positivas,  $\omega^2$  es igualmente positivo.

#### EJEMPLO

Como ejemplo se modelarán las ecuaciones del movimiento del péndulo doble. La energía potencial para este es (el problema posee dos grados de libertad)

$$U = m_1gl_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gl_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gl_2(1 - \cos \theta_2) .$$

Al aplicar la expansión (8), se tiene

$$U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2 .$$

Al comparar con (9), identificamos

$$\begin{aligned} k_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \\ k_{12} &= k_{21} = 0 \\ k_{22} &= m_2gl_2 . \end{aligned}$$

Para la energía cinética se encontró

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 .$$

Identificando términos al comparar con (10)

$$\begin{aligned} m_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \\ m_{12} &= m_{21} = m_2l_1l_2 \\ m_{22} &= m_2l_2^2 . \end{aligned}$$

Al sustituir las ecuaciones de las energías en (11) se obtiene la Lagrangiana para el oscilador de péndulo doble y como resultado final:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Estas son las ecuaciones de movimiento en este caso.

## 4.2 OSCILADOR ARMONICO FORZADO.

Si un sistema oscilatorio se somete a la acción de un campo externo variable, son las llamadas oscilaciones forzadas. Como consideramos pequeñas oscilaciones, entonces esperamos que la acción del campo exterior sea débil. Además de su energía potencial propia, el sistema posee en este caso una energía potencial  $U_e(x, t)$  debida al campo exterior. Desarrollando esta última en serie de potencias de la pequeña magnitud  $x$ :

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \left[ \frac{\partial U_e}{\partial x} \right]_{x=0} .$$

El segundo término, es la fuerza exterior que actúa sobre el sistema en su posición de equilibrio, designado este término como  $F(t)$ . Con esto, la Lagrangiana para este sistema es de la forma

$$L = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t) . \quad (22)$$

La ecuación de movimiento correspondiente es

$$m \ddot{x} + kx = F(t) ,$$

o bien

$$\ddot{x} + w^2x = F(t)/m , \quad (23)$$

donde  $w$  es la frecuencia para las oscilaciones libres. La solución general a esta ecuación es de la forma

$$x = x_h + x_p ,$$

es decir, de una parte homogénea y una solución correspondiente a un caso particular. Analizando el caso para el cual la fuerza exterior es función periódica simple del tiempo, de frecuencia  $\gamma$  de la forma

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) .$$

Al hallar la integral particular para la ecuación 23 en la forma  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  y al sustituir, se tiene que  $b = f/m(w^2 - \gamma^2)$ , que al juntar ambas soluciones, tenemos que la solución total es

$$x = a \cos(wt + \alpha) + \left[ f/m(w^2 - \gamma^2) \right] \cos(\gamma t + \beta) . \quad (24)$$

El resultado muestra una suma de dos oscilaciones: una debida a la frecuencia propia y otra con la frecuencia de la fuerza exterior.

La ecuación (23) puede ser integrada en forma general para una fuerza exterior arbitraria. Escribiendo la ecuación de la forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + iwx) - iw(\dot{x} + iwx) = \frac{1}{m}F(t) ,$$

haciendo  $\xi = \dot{x} + iwx$ , se tiene

$$\frac{d}{dt}\xi - iw\xi = F(t)/m .$$

La solución a esta última es del tipo  $\xi = A(t) \exp(iwt)$ ; para la función  $A(t)$  se obtiene

$$\dot{A} = F(t) \exp(-iwt)/m .$$

Al integrarla se obtiene la solución

$$\xi = \exp(iwt) \int_0^t \frac{1}{m} F(t) \exp(-iwt) dt + \xi_0 . \quad (25)$$

Esta es la solución general buscada; la función  $x(t)$  está dada por la parte imaginaria de esta última dividiendo por  $w$ .

#### EJEMPLO

Como empleo de la ecuación anterior se muestra el siguiente ejemplo. Determinar la amplitud final de las oscilaciones de un sistema bajo la acción de una fuerza exterior tal que  $F_0 = cte$  durante un tiempo limitado  $T$ . Para este intervalo de tiempo se tiene

$$\xi = \frac{F_0}{m} \exp(iwt) \int_0^T \exp(-iwt) dt$$

$$\xi = \frac{F_0}{iwm} [1 - \exp(-iwt)] \exp(iwt)$$

y el módulo cuadrado da la amplitud. De la relación  $|\xi|^2 = a^2 w^2$  con lo cual

$$a = \frac{2F_0}{mw^2} \text{sen}\left(\frac{1}{2}wT\right) .$$

### **4.3 OSCILADOR ARMONICO AMORTIGUADO.**

En las secciones anteriores consideramos sólo la carencia o la presencia de fuerzas externas, para los casos del oscilador armónico simple y forzado; respectivamente. Es decir, el movimiento tenía lugar en el vacío o bien, que la influencia del medio en el movimiento era despreciable. En la realidad, cuando un sistema se mueve a través de un medio, éste ofrece resistencia que tiende a retardar el movimiento. La energía del sistema se disipa (ya sea en

forma de calor ó de algun otra forma de energía). Primero analizamos como afecta este fenómeno a las oscilaciones simples.

El modo en que este medio afecta al movimiento es por fuerzas de rozamiento. Si esta fuerza disipativa es lo suficientemente pequeña, podemos desarrollarla en potencias de la velocidad. El término de orden cero del desarrollo es nulo, ya que ninguna fuerza de rozamiento actúa sobre un cuerpo en reposo, por lo que el primer término que no se anula es proporcional a la velocidad, además despreciando términos de orden superior.

$$f_r = -\alpha \dot{x} ,$$

donde  $x$  es la coordenada generalizada y  $\alpha$  un coeficiente positivo; el signo menos indica que es en sentido opuesto al movimiento. Añadiendo esta fuerza a la ecuación de movimiento

$$m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} ,$$

o bien

$$\ddot{x} = -kx/m - \alpha \dot{x}/m . \quad (26)$$

Haciendo  $k/m = w_o^2$  y  $\alpha/m = 2\lambda$ ; donde  $w_o$  es la frecuencia de las oscilaciones libres del sistema y  $\lambda$  es el coeficiente de amortiguamiento. Con lo anterior

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + w_o^2 x = 0 .$$

La solución para la ecuación anterior es de la forma  $x = \exp(rt)$ ; al sustituir esta en la ecuación anterior obtenemos la ecuación característica para  $r$ . De tal modo

$$r^2 + 2\lambda + w_o^2 = 0 ,$$

de donde

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - w_o^2)} ,$$

con lo que la solución general a la ecuación de movimiento es

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t) .$$

De las raíces de  $r$  podemos considerar los siguientes casos especiales:



(i)  $\lambda < w_o$ . Se tienen raíces imaginarias conjugadas. Con lo que la solución es

$$x = re \left\{ A \exp \left[ -\lambda t + i \sqrt{(w_o^2 - \lambda^2)} \right] \right\} ,$$

siendo  $A$  una constante compleja arbitraria. La solución puede ser escrita en la forma

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(wt + \alpha) \quad \text{siendo} \quad w = \sqrt{(w_o^2 - \lambda^2)} , \quad (27)$$

donde  $a$  y  $\alpha$  son constantes reales. De este modo, puede decirse que una oscilación amortiguada es como una oscilación armónica cuya amplitud decrece exponencialmente. La rapidez de disminución de la amplitud está determinada por el exponente  $\lambda$  y la frecuencia  $w$  es menor que las oscilaciones libres en ausencia de rozamiento.

(ii)  $\lambda > w_o$ . Entonces los dos valores de  $r$  son reales y negativos. La forma general de la solución es:

$$x = c_1 \exp \left\{ - \left[ \lambda - \sqrt{(\lambda^2 - w_o^2)} \right] t \right\} + c_2 \exp \left\{ - \left[ \lambda + \sqrt{(\lambda^2 - w_o^2)} \right] t \right\} .$$

Si el rozamiento es muy grande, el movimiento consiste en una disminución monótona, que tiende asintóticamente (cuando  $t \rightarrow \infty$ ) a la posición de equilibrio (sin oscilación). Este tipo de movimiento se llama aperiódico.

(iii)  $\lambda = w_o$ . Se tiene que  $r = -\lambda$ , cuya solución general es de la forma

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\lambda t) .$$

Si generalizamos para sistemas con  $n$  grados de libertad, las fuerzas de rozamiento generalizadas correspondientes a las coordenadas  $x_i$  son funciones lineales de las velocidades

$$f_{r,i} = \sum_j \alpha_{ij} \dot{x}_j , \quad (28)$$

con  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$  se puede escribir como

$$f_{r,i} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

donde  $F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$  y se le llama función disipativa. La ecuación diferencial se obtiene al sumar estas fuerzas a la ecuación (13)

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = - \sum_j \alpha_{ij} \dot{x}_j . \quad (29)$$

Haciendo en estas ecuaciones

$$x_k = A_k \exp(rt)$$

y al sustituir esta última en (29) y dividiendo por  $\exp(rt)$ , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales para las constantes  $A_j$

$$\sum_j (m_{ij} r^2 + \alpha_{ij} r + k_{ij}) A_j = 0 .$$

Igualando a cero el determinante de este sistema, se encuentra la ecuación característica para este sistema.

$$\left| m_{ij} r^2 + \alpha_{ij} r + k_{ij} \right| = 0 . \quad (30)$$

Esta es una ecuación en  $r$  de grado  $2n$ .

#### 4.4 MODOS NORMALES.

Antes de definir los modos normales, reescribiremos la ecuación (14) de la siguiente manera

$$M \left| \ddot{X} \right\rangle + K |X\rangle = 0 ,$$

donde  $|X\rangle$  es el vector  $n$ -dimensional cuya matrix de representación es (18);  $M$  y  $K$  son dos operadores que tienen la representación matricial definidas por (15) y (16) respectivamente. La ecuación antes descrita es una ecuación con operadores. Dado que  $M$  es un operador no singular y simétrico para el cual el operador inverso  $M^{-1}$  y el operador  $M^{1/2}$  y  $M^{-1/2}$  existen. Con lo anterior podemos expresar la ecuación de operadores en la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} M^{1/2} |X\rangle = -M^{-1/2} K M^{-1/2} M^{1/2} |X\rangle ,$$

o de la forma más compacta

$$\frac{d^2}{dt^2} \left| \bar{X} \right\rangle = -\lambda \left| \bar{X} \right\rangle , \quad (31)$$

donde

$$|\bar{X}\rangle = M^{1/2} |X\rangle$$

y

$$\lambda = M^{-1/2} K M^{-1/2} .$$

Como  $M^{-1/2}$  y  $K$  son operadores simétricos, entonces  $\lambda$  es igualmente simétrico. Si empleamos eigenvectores ortogonales como base vectorial (por ejemplo el espacio tridimensional), la representación matricial del operador puede ser diagonal de la forma

$$\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} .$$

Trataremos el siguiente problemas de eigenvalores

$$\lambda |\rho_i\rangle = \lambda_i |\rho_i\rangle , \quad (32)$$

donde  $|\rho_i\rangle$  representa un conjunto de eigenvectores mutuamente ortogonales; o bien

$$M^{-1/2} K M^{-1/2} |\rho_i\rangle = \lambda_i |\rho_i\rangle .$$

Los eigenvalores son obtenidos al multiplicar ambos lados por  $\langle \rho_i |$ , con lo cual

$$\lambda_i = \frac{\langle \rho_i | M^{-1/2} K M^{-1/2} |\rho_i\rangle}{\langle \rho_i | \rho_i\rangle} .$$

Dado que las energías potencial y cinética son cantidades positivas, se tiene que

$$\langle \rho_i | M^{-1/2} K M^{-1/2} |\rho_i\rangle > 0$$

y por lo tanto

$$\lambda_i > 0 .$$

Esto nos permite el conjunto

$$\lambda_i = w_i^2 .$$

Si expresamos el vector  $|\bar{X}\rangle$  en términos de estos eigenvectores de  $\lambda$ ,

$$|\bar{X}\rangle = \sum_i y_i |\rho_i\rangle ,$$

donde

$$y_i = \langle \rho_i | \bar{X} \rangle . \quad (33)$$

Al insertar este resultado en la ecuación de movimiento (31), se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i y_i |\rho_i\rangle = -\lambda |\bar{X}\rangle = -\sum_i \lambda_i y_i |\rho_i\rangle .$$

El producto escalar de esta ecuación con el eigenvector constante  $\langle \rho_j |$ , produce la ecuación de movimiento para las coordenadas generalizadas  $y_j$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_j = -w_j^2 y_j .$$

La solución para esta ecuación es de la forma

$$y_j = A_j \cos(w_j t + \phi_j) . \quad (34)$$

En base a estas nuevas coordenadas para el movimiento armónico de un sistema de partículas, pueden obtenerse un conjunto de ecuaciones de movimiento generalizadas e independientes. La relación entre estas  $y_j$ 's y  $\bar{x}_i$ 's está dada por (33)

$$y_j = \rho_{j1} \bar{x}_1 + \rho_{j2} \bar{x}_2 + \dots + \rho_{jn} \bar{x}_n .$$

Los componentes  $\rho_{jl}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) son determinados al resolver el problema de eigenvalores de la ecuación (32). Las nuevas coordenadas son referidas como las coordenadas normales, y las  $w_j$ 's como las frecuencias normales. La forma equivalente (34) en matrices es

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1^{(j)} \\ \bar{x}_2^{(j)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(j)} \end{pmatrix} = A_j \cos(w_j t + \phi_j) \begin{pmatrix} \rho_{j1} \\ \rho_{j2} \\ \vdots \\ \rho_{jn} \end{pmatrix} . \quad (35)$$

Esta última refiere los modos normales de vibración del sistema. Una de las razones de haber introducido coordenadas  $y_j$ 's se aprecia al observar que la

expresión para la energía cinética no cambia si se rotaran los ejes del nuevo sistema no cambian

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{y}_j^2 .$$

### EJEMPLO

Suponiendo un arreglo matricial de la forma mostrada, la cual representa las ecuaciones de movimiento obtenidas para un sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} .$$

Comparando con (31), identificamos el valor del operador  $\lambda$ . Al encontrar los egienvectores empleamos (32) con lo cual

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} .$$

Determinamos la ecuación característica para las  $\lambda_i$ . De manera que

$$\det(\lambda - \lambda_i I) = 0 ,$$

al sustituir valores

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Al resolver la ecuación se tiene que  $\lambda_i = 2, 4, 6$ . Para  $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(5-4)\rho_1 + \rho_3 &= 0 \\
2\rho_2 - 4\rho_2 &= 0 \\
\rho_1 + (5-4)\rho_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de normalización, se obtienen los valores

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\rho_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Con lo anterior

$$|\rho_{\lambda=4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De igual modo se obtienen

$$\begin{aligned}
|\rho_{\lambda=6}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|\rho_{\lambda=2}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así, el nuevo espacio vectorial está determinado por

$$|\rho_i\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\langle \rho_i | = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, las coordenadas normales son dadas por (33)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

## 4.5 RESONANCIA PARAMETRICA.

El importante fenómeno de resonancia paramétrica se presenta al tener un sistema que se encuentra en un estado de reposo (en la posición de equilibrio  $x = 0$ ) y es inestable; es decir, bastará una separación de esta posición por pequeña que sea para provocar un desplazamiento  $x$  rápidamente creciente con el tiempo. Se diferencia de las resonancias ordinarias, en las cuales el desplazamiento crece con el tiempo (proporcional a  $t$ ).

Los parámetros de un sistema lineal son los coeficientes  $m$  y  $k$  de la Lagrangiana (3); si estos son función del tiempo, la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) + kx = 0 . \quad (36)$$

Si consideramos la masa constante, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2(t)x = 0 . \quad (37)$$

La forma de la función  $w(t)$  está dada por las condiciones del problema; suponiendo que la función es periódica de frecuencia  $\gamma$  (y de periodo  $T = 2\pi/\gamma$ ). Lo que significa

$$w(t + T) = w(t) ,$$

por lo cual, toda ecuación del tipo (37) es invariante con respecto a la transformación  $t \rightarrow t+T$ . Así, si  $x(t)$  es una solución de esta, la función  $x(t+T)$  es también solución. Con lo anterior, sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  dos integrales independientes de (37), estas deben transformarse en ellas mismas en combinación lineal cuando se sustituye  $t \rightarrow t + T$ . La forma de ello es

$$\begin{aligned} x_1(t + T) &= \mu_1 x_1(t) \\ x_2(t + T) &= \mu_2 x_2(t) , \end{aligned} \quad (38)$$

o en forma general

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1^{t/T} F(t) \\ x_2(t) &= \mu_2^{t/T} G(t) , \end{aligned}$$

donde  $F(t)$  y  $G(t)$  son funciones puramente periódicas del tiempo (de período  $T$ ). La relación entre estas constantes se obtiene al manipular las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + w^2(t)x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + w^2(t)x_2 &= 0 .\end{aligned}$$

Multiplicando por  $x_2$  y  $x_1$  respectivamente, y restándolas miembro a miembro, se obtiene

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0 ,$$

o también

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = cte .$$

Al sustituir  $t$  por  $t + T$  en la ecuación anterior, el miembro derecho está multiplicado por  $\mu_1\mu_2$  (debido a 38); por lo que es evidente que

$$\mu_1\mu_2 = 1 , \tag{39}$$

teniendo en cuenta (37) y sabiendo que los coeficientes son reales. Si  $x(t)$  es una integral de esta ecuación, la función  $x^*(t)$  también lo es. Lo anterior conduce a que  $\mu_1, \mu_2$  deben coincidir con  $\mu_1^*, \mu_2^*$ , es decir, o  $\mu_1 = \mu_2^*$  o también  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son reales. En el primer caso y teniendo en cuenta (39) resulta que  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$  lo que es igual  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ . En el segundo caso, las dos integrales son de la forma

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu^{t/T} F(t) \\ x_2(t) &= \mu^{-t/T} G(t) .\end{aligned}$$

Una de estas funciones crece exponencialmente con el tiempo.

#### BIBLIOGRAFIA.

- \* H. Goldstein, *Classical mechanics*, Second ed. (Addison-Wesley, 1981).
- \* L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mecánica*, (Reverté, 1969).
- \* W. Hauser, *Introduction to the principles of mechanics*, (Wesley, 1965).
- \* E.I. Butikov, *Parametric Resonance*, Computing in Science & Engineering, May/June 1999, pp. 76-83 (<http://computer.org>).



## 5. TRANSFORMACIONES CANONICAS

**Prólogo:** La idea principal de las transformaciones canónicas es encontrar todos aquellos sistemas de coordenadas (en el espacio de fases) los cuales *preserven la forma de las ecuaciones de Hamilton, independientemente de qué Hamiltoniano se trate*. Posteriormente se escoge de entre todos esos sistemas de coordenadas aquel en el cual se facilite la resolución del problema en particular.

### CONTENIDO:

- 5.1 Definiciones, Hamiltoniano y Kamiltoniano
- 5.2 Condiciones necesarias y suficientes para que una transf. sea canónica
- 5.3 Ejemplo de aplicación de transf. canónica

## 5.1 Definiciones, Hamiltoniano y Kamiltoniano

Se define una transformación canónica, considerando los casos en que la transformación depende explícitamente (o no) del tiempo, de la siguiente manera:

**Definición 1:** Una transformación independiente del tiempo  $Q = Q(q, p)$ , y  $P = P(q, p)$  se dice que es canónica si y solo si existe una función  $F(q, p)$  tal que

$$dF(q, p) = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i(q, p) dQ_i(q, p) .$$

**Definición 2:** Una transformación dependiente del tiempo  $Q = Q(q, p, t)$ , y  $P = P(q, p, t)$  se dice que es canónica si y solo si existe una función  $F(q, p, t)$  tal que para un tiempo arbitrario fijo  $t = t_0$

$$dF(p, q, t_0) = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i(q, p, t_0) dQ_i(p, q, t_0) ,$$

donde

$$dF(p, q, t_0) = \sum_i \frac{\partial F(p, q, t_0)}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial F(p, q, t_0)}{\partial p_i} dp_i$$

y

$$dQ(p, q, t_0) = \sum_i \frac{\partial Q(p, q, t_0)}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial Q(p, q, t_0)}{\partial p_i} dp_i$$

**Ejemplo:** Demostrar que la siguiente transformación es canónica:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \\ Q &= \text{Tan}^{-1} \left( \frac{q}{p} \right) . \end{aligned}$$

**Solución:** De acuerdo a la definición 1, debemos verificar que  $pdq - PdQ$  es una diferencial exacta. Sustituyendo  $P$  y  $Q$  de la transformación dada en el problema obtenemos:

$$pdq - PdQ = pdq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \frac{pdq - qdq}{p^2 + q^2} = d \left( \frac{pq}{2} \right) .$$

De lo anterior concluimos que efectivamente, la transformación dada en el problema es canónica. Sabemos que un sistema dinámico se encuentra caracterizado por su Hamiltoniano  $H = H(q, p, t)$ , en donde  $q = q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,

y  $p = p(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , y que por tanto el sistema tiene asociado un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, dadas por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (2)$$

Sean las transformaciones de coordenadas en el espacio de fase, denotadas como

$$Q_j = Q_j(q, p, t) \quad (3)$$

$$P_j = P_j(q, p, t) , \quad (4)$$

entonces, de acuerdo a lo dicho al principio, denotaremos como transformaciones canónicas al conjunto de transformaciones de la forma de (3) y (4) para las cuales, análogamente a (1) y (2), exista una función  $K = K(Q, P, t)$  tales que podamos escribir

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (5)$$

$$-\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i} . \quad (6)$$

La relación existente entre el Hamiltoniano  $H$  y el nuevo Kamiltoniano  $K$ <sup>1</sup> se puede obtener a partir de las siguientes consideraciones<sup>2</sup>.

De acuerdo al principio de Hamilton, la trayectoria real que un sistema clásico describirá se puede obtener a partir de variación de la integral de acción dada por

$$\delta \int (\sum_i p_i dq_i - H dt) = 0 . \quad (7)$$

Si la transformación es canónica, entonces el nuevo Kamiltoniano  $K$  debe también cumplir una relación similar a (7), es decir, con el nuevo conjunto

---

<sup>1</sup>Aquí seguiremos la misma terminología empleada por Goldstein al referirse a la nueva función  $K = K(Q, P, t)$ , la cual difiere del Hamiltoniano  $H = H(p, q, t)$  por una derivada temporal aditiva, como la *Kamiltoniana*.

<sup>2</sup>Una derivación alternativa a la presente ha sido dada por G. S. S. Ludford and D. W. Yannitell, Am. J. Phys. 36, 231 (1968).

de coordenadas  $Q$  y  $P$  también es válido que

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - K dt \right) = 0 . \quad (8)$$

Sabemos además que, de acuerdo a la transformación de Legendre,  $\sum_i p_i dq_i - H dt = L(q, \dot{q}, t) dt$ , por lo que (7) -lo mismo que (8)- equivale a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (9)$$

y que (9) no se altera si  $L$  es sustituido por  $\mathcal{L} = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$  porque en este caso,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \frac{dF(q,t)}{dt} \right) dt , \quad (10)$$

o en forma equivalente

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \delta F(q_{(2)}, t_2) - \delta F(q_{(1)}, t_1) \quad (11)$$

, por lo que (10) y (11) difieren solamente por terminos constantes los cuales dan como resultado una variación nula al momento de aplicar el principio de Hamilton.

De acuerdo a lo anterior podemos exigir que el Hamiltoniano  $H$  y el Kamiltoniano  $K$  se encuentren relacionados por la ecuación <sup>3</sup>

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} . \quad (12)$$

La función  $F$  es llamada **función generadora**. Esta puede ser expresada como una función de cualquier conjunto arbitrario de variables independientes. Sin embargo, algunos resultados muy convenientes son obtenidos si  $F$  es expresada como función de las  $n$  viejas variables y las  $n$  nuevas variables, más el tiempo. Los resultados son especialmente convenientes si las  $n$  viejas variables son en su totalidad las  $n$   $q_i$  - o las  $n$   $p_i$ -, y si las nuevas variables son en su totalidad las  $n$   $Q_i$  - o las  $n$   $P_i$ .

<sup>3</sup>Algunos autores agregan al lado derecho de esta ecuación un factor multiplicativo constante  $A$  ya que en este caso tampoco se ve alterado (1.9). Nosotros escogimos arbitrariamente  $A = 1$ , es decir, decidimos trabajar con *transformaciones canónicas restringidas*, ya que este caso es suficiente para mostrar la estructura de las transformaciones canónicas.

Atendiendo a lo dicho en el párrafo anterior, las posibles combinaciones de  $n$  variables viejas y  $n$  variables nuevas -incluyendo a  $t$ - en la función generadora son: <sup>4</sup>

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(Q, q, t) \\ F_2 &= F_2(P, q, t) \\ F_3 &= F_3(Q, p, t) \\ F_4 &= F_4(P, p, t) . \end{aligned} \tag{13}$$

Por otro lado, si multiplicamos (1.12) por  $dt$  obtenemos:

$$p_i dq_i - H dt = P dQ_i - K dt + dF . \tag{14}$$

Y haciendo el cambio  $F \rightarrow F_1$  en la relación anterior, y recordando que  $dQ_i$ ,  $dq_i$ , y  $dt$  son variables independientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \end{aligned}$$

Mediante manipuleos algebraicos es posible obtener expresiones análogas a la anterior que involucren a las restantes funciones generadores. Los resultados que se obtienen se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} F_2 : \quad Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ F_3 : \quad P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ F_4 : \quad Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} . \end{aligned}$$

En la practica resulta útil el siguiente teorema, el cual permite, junto con las definiciones dadas en la introducción para que una transformación sea canónica (ya sea que la transformamación dependa o no explícitamente del tiempo), resolver cualquier problema mecánico de interés <sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Usaremos la misma convención de Goldstein para denotar cada una de las diferentes combinaciones de las variables nuevas y viejas en la función generadora.

<sup>5</sup>Para un ejemplo, ver la sección final de este capítulo.

**Teorema 1.1.:** Consideremos un sistema sobre el cual se ejerce una fuerza neta dada. Supongamos además que el estado dinámico del sistema está definido por un conjunto de variables  $q, p = q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$  y que el Hamiltoniano del sistema es  $H = H(q, p, t)$  tal que el comportamiento de las variables  $q$  y  $p$  esté determinado por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} .\end{aligned}$$

Si nosotros hacemos una transformación a las nuevas variables

$$Q = Q(q, p, t) \quad ; \quad P = P(q, p, t)$$

y si la transformación es canónica, es decir, si existe una función  $F(q, p, t)$  tal que para un tiempo arbitrario fijo  $t = t_0$ ,

$$dF(q, p, t_0) = \sum_i y_i dx_i - \sum_i Y_i dX_i ,$$

donde  $x_i, y_i = q_i, p_i$  o  $p_i, -q_i$  y  $X_i, Y_i = Q_i, P_i$ , o  $P_i, -Q_i$ , entonces las ecuaciones de movimiento en términos de las variables  $Q$  y  $P$  son

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_i} ,\end{aligned}$$

donde

$$K \equiv H + \frac{\partial F(q, p, t)}{\partial t} + \sum_i Y_i \frac{\partial X_i(q, p, t)}{\partial t} .$$

Además si el determinante de la matriz  $[\frac{\partial X_i}{\partial y_j}]$  es distinto de cero, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$K \equiv H + \frac{\partial F(x, X, t)}{\partial t} .$$

## 5.2 Condiciones necesarias y suficientes para que una transformación sea canónica

Hemos mencionado al principio que por transformación canónica entenderemos aquella transformación que, independientemente de cual sea la forma

del Hamiltoniano, preserve la forma de las ecuaciones de Hamilton. Se debe ser muy cuidadoso respecto a este punto ya que es posible que existan transformaciones que preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, pero para un *Hamiltoniano particular* <sup>6</sup>. Algunos autores le denominan a este tipo de transformación **transformación canónica respecto a H** <sup>7</sup>.

Para ilustrar este punto utilizaremos el siguiente ejemplo, sugerido en el artículo de J. Hurley: Consideremos un *sistema físico particular* cuyo Hamiltoniano sea

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (15)$$

y consideremos las transformaciones

$$\begin{aligned} P &= p^2 \\ Q &= q. \end{aligned} \quad (16)$$

Es fácil demostrar que el Hamiltoniano  $K$  dado por

$$K = \frac{2P^{3/2}}{3m}$$

conduce a

$$\dot{P} = 2p\dot{p} = 0 = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

y

$$\dot{Q} = \dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{P^{1/2}}{m} = \frac{\partial K}{\partial P}. \quad (17)$$

Por otro lado, si escogemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + q^2,$$

entonces es imposible encontrar un Hamiltoniano  $K$  tal que al usar las ecuaciones de transformación (16) se preserve la forma de las ecuaciones de Hamilton. Como vemos, en el anterior ejemplo las ecuaciones (16) preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, pero para un *Hamiltoniano en particular*.

<sup>6</sup>Ver por ejemplo, J. Hurley, Am. J. Phys. **40**, 533 (1972).

<sup>7</sup>Ver por ejemplo, R. A. Matzner y L. C. Shepley, *Classical Mechanics* (Prentice Hall, 1991).

Se puede demostrar que las condiciones necesarias y suficientes para que transformaciones de la forma (3) y (4) sean canónicas, es decir, que preserven la forma de las ecuaciones de Hamilton *independientemente del Hamiltoniano que se considere*, son:

$$[Q_i, P_j] = \alpha \quad (18)$$

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (19)$$

$$[Q_i, Q_j] = 0, \quad (20)$$

en donde  $\alpha$  es una constante cualquiera, relacionada con cambios de escala. Algunos comentarios merecen ser mencionados antes de finalizar esta sección. En primer lugar, debemos mantener en mente que  $Q$  y  $P$  *no constituyen variables que definan la configuración del sistema*, es decir, no constituyen en general un conjunto de coordenadas generalizadas<sup>8</sup>. Para distinguir a  $Q$  y  $P$ , de las coordenadas generalizadas  $q$  y  $p$ , se les denomina *variables canónicas*. Y a las ecuaciones de movimiento -similares en forma a las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas generalizadas  $q$  y  $p$ - que se obtienen para  $Q$  y  $P$  se les denomina *ecuaciones canónicas de Hamilton*. En segundo lugar, aunque no lo probamos aquí, si la transformación  $Q = Q(q, p, t)$  y  $P = P(q, p, t)$  es canónica, entonces la transformación inversa  $q = q(Q, P, t)$  y  $p = p(Q, P, t)$  es también canónica<sup>9</sup>.

### 5.3 Ejemplo de aplicación de TC

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, la idea principal de realizar una transformación canónica es encontrar sistemas de coordenadas (en el espacio de fases) los cuales preserven la forma de las ecuaciones de Hamilton, independientemente de la forma del Hamiltoniano, y escoger de entre todos ellos, aquel que *facilite la resolución del problema en particular*. Vamos a ilustrar este punto con un ejemplo.

**EJEMPLO:**

El Hamiltoniano de cierto sistema físico está dado por  $H = \omega^2 p(q + t)^2$ , donde  $\omega$  es una constante. Determine  $q$  como una función del tiempo.

**Solución:**

---

<sup>8</sup>Salvo el caso trivial en que la transformación canónica sea  $Q = q$  y  $P = p$ .

<sup>9</sup>Para una demostración sobre este punto, ver por ejemplo, E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Volume 2* (John Wiley & Sons, 1982).



1. *Resolviendo las ecuaciones de Hamilton para las variables  $q$  y  $p$ .* Al aplicar las ecuaciones de Hamilton (1) y (2) al Hamiltoniano dado en este problema, se obtiene

$$\omega^2(q+t)^2 = \dot{q}, \quad 2\omega^2 p(q+t) = -\dot{p} .$$

Este sistema no es de solución fácil. Sin embargo, este problema se puede resolver fácilmente con una adecuada transformación canónica, tal como se muestra a continuación.

2. *Haciendo uso de la transformación canónica  $Q = q + t$ ,  $P = p$ .* De acuerdo al teorema dado en la sección (1.1), puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial(-q)} &= 0 , \end{aligned}$$

entonces el Kamiltoniano  $K$  del sistema está dado por

$$K = H + \frac{\partial F(q, p, t)}{\partial t} + P \frac{\partial Q}{\partial t} - Q \frac{\partial P}{\partial t} . \quad (21)$$

La forma de la función  $F(q, p, t)$  la encontramos a partir de la definición de transformación canónica dada en la sección 1 -este caso corresponde a una transformación canónica dependiente explícitamente del tiempo-. Es decir, a partir de

$$dF(q, p, t) = pdq - PdQ .$$

Y sustituyendo  $Q = q + t$ ,  $P = p$  en la relación anterior se obtiene sin ninguna dificultad que

$$F(q, p, t) = c, \quad c = \text{constante} .$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= 1 . \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo estos resultados (y sustituyendo  $Q = q + t$ ,  $P = p$  en el Hamiltoniano  $H$ ) en (21) obtenemos

$$K = P(\omega^2 Q^2 + 1)$$

Y de (5) obtenemos

$$\dot{Q} = \omega^2 Q^2 + 1 .$$

Esta ecuación diferencial se resuelve fácilmente, y se obtiene como resultado final

$$q = \frac{1}{\omega} \tan(\omega t + \phi) - t ,$$

en donde  $\phi$  es una fase arbitraria. Como se puede observar, la correcta elección de la transformación canónica puede facilitar la solución de cualquier problema mecánico.

## 6. PARENTESIS DE POISSON

**Prólogo:** Los paréntesis de Poisson son herramientas analíticas muy útiles para estudiar el comportamiento de cualquier sistema dinámico. Nosotros definiremos en este capítulo lo que se entiende por paréntesis de Poisson; daremos algunas de sus propiedades, y finalmente presentaremos algunas aplicaciones de los mismos en el estudio de sistemas dinámicos.

### **CONTENIDO:**

1. Definición y propiedades
2. Formulación de Poisson para las ecs. de movimiento
3. Las constantes de movimiento en la formulación de Poisson

## 1. Definición y propiedades de los paréntesis de Poisson

Si  $u$  y  $v$  son cualesquiera dos cantidades que dependen del estado dinámico del sistema (es decir, de  $p$  y de  $q$ ) y posiblemente del tiempo, el paréntesis de Poisson de  $u$  y  $v$  con respecto a un conjunto de variables canónicas  $q$  y  $p$ <sup>10</sup> es definido como

$$[u, v] \equiv \sum_i \left( \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial q_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial p_i} - \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial p_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial q_i} \right). \quad (1)$$

Los paréntesis de Poisson tienen las siguientes propiedades (donde  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son funciones arbitrarias de  $q$ ,  $p$ , y de  $t$ ;  $a$  es una constante arbitraria, y  $r$  es cualquiera de las variables  $q_i$ ,  $p_i$  o  $t$ )<sup>11</sup>:

- Propiedad 1.*  $[u, v] \equiv -[v, u]$
- Propiedad 2.*  $[u, u] \equiv 0$
- Propiedad 3.*  $[u, v + w] \equiv [u, v] + [u, w]$
- Propiedad 4.*  $[u, vw] \equiv v[u, w] + [u, v]w$
- Propiedad 5.*  $a[u, v] \equiv [au, v] \equiv [u, av]$
- Propiedad 6.*  $\frac{\partial [u, v]}{\partial r} \equiv \left[ \frac{\partial u}{\partial r}, v \right] + \left[ u, \frac{\partial v}{\partial r} \right]$
- Propiedad 7. Identidad de Jacobi,*  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] \equiv 0$ .

Otra propiedad muy importante de los paréntesis de Poisson es enunciada en el siguiente teorema:

**Teorema 6.1** Si la transformación  $Q = Q(q, p, t)$ ,  $P = P(q, p, t)$  es una transformación canónica, el paréntesis de Poisson de dos cantidades  $u$  y  $v$  con respecto al conjunto de variables  $q$ ,  $p$ , es igual al paréntesis de Poisson de  $u$  y  $v$  con respecto al conjunto de variables  $Q$ ,  $P$ , es decir

$$\sum_i \left( \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial q_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial p_i} - \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial p_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial q_i} \right) =$$

<sup>10</sup>Como en el capítulo anterior, entendemos a  $q$  y  $p$  como  $q = q_1, q_2, \dots, q_n$  y  $p = p_1, p_2, \dots, p_n$ .

<sup>11</sup>La prueba de estas propiedades se logra utilizando la definición de los paréntesis de Poisson para expresar cada uno de los términos de estas identidades en términos de las derivadas parciales de  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , y notando por inspección la validez de las ecuaciones resultantes.

$$\sum_i \left( \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial Q_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial P_i} - \frac{\partial u(q, p, t)}{\partial P_i} \frac{\partial v(q, p, t)}{\partial Q_i} \right).$$

## 2. La formulación de Poisson para las ecuaciones de movimiento

Resumimos a continuación, en forma de teoremas, los resultados más importantes sobre los paréntesis de Poisson en el análisis de el movimiento de cualquier sistema dinámico <sup>12</sup>:

**Teorema 6.2:** Consideremos un sistema cuyo estado dinámico está definido por las variables canónicas  $q, p$  y cuyo comportamiento dinámico está definido por la Hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$ . Sea  $F$  una cantidad arbitraria que depende del estado dinámico del sistema (es decir, de  $q, p$ , y posiblemente  $t$ ). La razón de cambio en el tiempo de  $F$  está dada por

$$\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F(q, p, t)}{\partial t},$$

donde  $[F, H]$  es el paréntesis de Poisson de  $F$  con  $H$ .

**Teorema 6.3 (Formulación de Poisson de las ecs. de movimiento).**

Consideremos un sistema cuyo estado dinámico está definido por las variables canónicas  $q, p$ , y cuyo comportamiento dinámico está dado por la Hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$ . El movimiento del sistema está gobernado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, H] \\ \dot{p}_i &= [p_i, H]. \end{aligned}$$

## 3. Las constantes de movimiento en la formulación de Poisson

Nuevamente enunciaremos los resultados más importantes sobre la formulación de Poisson de las constantes de movimiento, en forma de teoremas. Estos son los siguientes:

**Teorema 6.4** Si una cantidad dinámica  $F$  no es una función explícita de el tiempo, y si el paréntesis de Poisson de  $F$  con  $H$  es nulo, es decir,  $[F, H] = 0$ , entonces  $F$  es una constante del movimiento.

**Corolario 6.4.a** Si el Hamiltoniano no es una función explícita del tiempo, entonces es una constante de movimiento.

---

<sup>12</sup> Las demostraciones han sido omitidas por ser muy conocidas. Ver por ejemplo, E. A. Desloge, *Classical Mechanics, Volume 2* (John Wiley & Sons, 1982).

## 7. LAS ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI

**Prólogo:** Sabemos de los capítulos anteriores que podemos, en principio, disminuir la complejidad de cualquier problema de dinámica escogiendo una adecuada transformación canónica. En particular, podemos tratar de buscar aquellas transformaciones canónicas que hagan que el Hamiltoniano  $K$  sea nulo, lo que da las ecs. de Hamilton-Jacobi.

### CONTENIDO:

7.1 Introducción

7.2 Ec. de Hamilton-Jacobi dependiente del tiempo

7.3 Ec. de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo

7.4 Generalización de la ec. de Hamilton-Jacobi

7.5 Ejemplo de aplicación de la ec. de Hamilton-Jacobi

## 7.1 Introducción.

Para lograr nuestros propósitos en este capítulo, necesitamos hacer uso del siguiente resultado, el cual nos permite encontrar el conjunto de variables canónicas que hacen que el Kamiltoniano asuma *una forma particular*.

**Teorema 7.1.** Consideremos un sistema cuyo estado dinámico está definido por las variables  $p, q$  y cuyo comportamiento bajo la acción de una fuerza dada está dado por la Hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$ . Sea  $K = K(Q, P, t)$  una *función conocida* de las variables canónicas  $Q, P$ , y también del tiempo. Entonces cualquier función  $F(q, Q, t)$  que satisfaga la ecuación diferencial parcial

$$K \left[ Q, -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q}, t \right] = H \left[ q, \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q}, t \right] + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}$$

y también satisface la condición

$$\left| \frac{\partial^2 F(q, Q, t)}{\partial q_j \partial Q_j} \right| \neq 0$$

es una función generadora para una transformación canónica de las variables  $q, p$  a las variables  $Q, P$ , y la correspondiente Kamiltoniana es justamente  $K = K(Q, P, t)$ .

En las siguientes secciones haremos uso del anterior problema para encontrar aquellas transformaciones canónicas cuyo kamiltoniano sea nulo <sup>13</sup>; esto nos conducirá a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

## 7.2 Ecuación de HJ dependiente del tiempo.

Como una consecuencia del Teorema 7.1 y de exigir que el Kamiltoniano  $K$  sea nulo, obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 7.2.** Consideremos un sistema de  $f$  grados de libertad cuyo estado dinámico esté definido por el conjunto de variables  $q, p$  y cuyo Hamiltoniano sea  $H = H(q, p, t)$ . Si construimos la ecuación diferencial parcial

$$H \left[ q, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, t \right] + \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

---

<sup>13</sup>Es decir,  $K \left[ Q, -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q}, t \right] = 0$ .

y si encontramos una solución a ésta ecuación de la forma

$$S = S(q, \alpha, t) ,$$

donde  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$  es un conjunto de constantes, y si la solución satisface la condición

$$\left| \frac{\partial^2 S(q, \alpha, t)}{\partial q_i \partial \alpha_i} \right| \neq 0 ,$$

entonces  $q(t)$  puede ser obtenido de las ecuaciones

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i , \quad (2)$$

donde  $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$  es un conjunto de constantes. El conjunto de ecuaciones (2) nos proporciona  $f$  ecuaciones algebraicas en las  $f$  variables desconocidas  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Los valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son determinados por las condiciones de frontera. Además es posible, dada  $q(t)$ , encontrar  $p(t)$  a partir de la relación

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} . \quad (3)$$

A la ecuación diferencial parcial (1) se le denomina *ecuación de Hamilton-Jacobi dependiente del tiempo*. Y a la función  $S(q, \alpha, t)$  se le denomina *función principal de Hamilton*.

Para lograr una mayor comprensión de este teorema, así como del significado de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , procedemos a continuación a desarrollar su demostración.

**Demostración del Teorema 7.2.** De acuerdo al Teorema 7.1, cualquier función  $F(q, Q, t)$  que satisface la ecuación diferencial parcial

$$H \left[ q, \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q}, t \right] + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = 0$$

y también satisface la condición

$$\left| \frac{\partial^2 F(q, Q, t)}{\partial q_j \partial Q_j} \right| \neq 0$$

deberá ser una función generadora para una transformación canónica a un conjunto de variables canónicas  $Q, P$  para las cuales el Kamiltoniano  $K$  sea nulo, es decir  $K(Q, P, t) = 0$ . La función

$$F(q, Q, t) = [S(q, \alpha, t)]_{\alpha=Q} \equiv S(q, Q, t)$$



es tal función. Entonces  $S(q, Q, t)$  es la función generadora para una transformación canónica que lleva al nuevo conjunto de variables  $Q, P$ , para las cuales el Kamiltoniano  $K$  es idénticamente igual a cero. Las ecuaciones de transformación asociadas con la función generadora  $S(q, Q, t)$  están definidas por las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad (4)$$

$$P_i = -\frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad (5)$$

y como  $K(Q, P, t) \equiv 0$ , las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_i} = 0$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_i} = 0$$

De las anteriores ecuaciones inferimos que

$$Q_i = \alpha_i \quad (6)$$

$$P_i = -\beta_i, \quad (7)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son constantes. La elección del signo negativo para  $\beta_i$  en la ecuación (7) se hizo por mera conveniencia. Si ahora sustituimos las ecuaciones (6) y (7) en la ecuación (5) obtenemos

$$-\beta_i = -\left[ \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q_i} \right]_{Q=\alpha} = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i},$$

la cual se reduce a (2). Si además sustituimos (6) en (4) obtenemos (2). Esto completa la prueba.

### 7.3 Ecuación HJ independiente del tiempo.

Si la función Hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, nosotros podemos parcialmente resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi dependiente del tiempo. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema:

**Teorema 7.3.** Consideremos un sistema de  $f$  grados de libertad cuyo estado dinámico está definido por el conjunto de variables  $q, p$ , y cuyo comportamiento bajo la acción de una fuerza definido por la función Hamiltoniana independiente del tiempo  $H(q, p)$ .

Si construimos la ecuación diferencial parcial

$$H \left[ q, \frac{\partial W(q)}{\partial q} \right] = E , \quad (8)$$

donde  $E$  es una constante cuyo valor para un conjunto particular de condiciones es igual al valor de la constante de movimiento  $H(q, p)$  para las condiciones de frontera dadas, y si nosotros podemos encontrar una solución a esta ecuación, de la forma

$$W = W(q, \alpha) ,$$

donde  $\alpha \equiv \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$  es un conjunto de constantes que explícita o implícitamente incluye a la constante  $E$ , es decir,  $E = E(\alpha)$ , y si la solución satisface la condición

$$\left| \frac{\partial^2 W(q, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| \neq 0 ,$$

entonces las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (9)$$

donde

$$S(q, \alpha, t) \equiv W(q, \alpha) - E(\alpha)t$$

y  $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$  es un conjunto de constantes. El conjunto de ecuaciones (9) proporciona  $f$  ecuaciones algebraicas en las  $f$  variables desconocidas  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Los valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son determinados por las condiciones de frontera. La ecuación diferencial parcial (8) recibe el nombre de *ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo*, y a la función  $W(q, \alpha)$  se le conoce como *función característica de Hamilton*.

## 7.4 Generalización de la ecuación de HJ.

La ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser generalizada como se establece en el siguiente teorema, el cual permite, algunas veces, el simplificar algunos problemas de Hamilton-Jacobi.

**Teorema 7.4.** Consideremos un sistema de  $f$  grados de libertad cuyo estado dinámico está definido por un conjunto de variables  $x, y$ , donde  $x_i, y_i = q_i, p_i$  o  $p_i, -q_i$ , y cuyo comportamiento bajo la acción de una fuerza dada está

dado por la Hamiltoniana  $H(x, y, t)$ . Si construimos la ecuación diferencial parcial

$$H \left[ x, \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, t \right] + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0$$

y si podemos encontrar una solución a esta ecuación de la forma

$$S = S(x, \alpha, t)$$

donde  $\alpha \equiv \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$  es un conjunto de constantes, y si la solución satisface la condición

$$\left| \frac{\partial^2 S(x, \alpha, t)}{\partial x_j \partial \alpha_j} \right| \neq 0$$

entonces el movimiento del sistema puede ser obtenido de las ecuaciones

$$\frac{\partial S(x, \alpha, t)}{\partial x_i} = y_i \quad (10)$$

$$\frac{\partial S(x, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (11)$$

donde  $\beta \equiv \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$  es un conjunto de constantes.

En la siguiente sección mostraremos algunos ejemplos donde hacemos uso de todos los resultados obtenidos hasta aquí en este capítulo.

## 7.5 Ejemplo de aplicación de la ecuación de HJ

Vamos a resolver el problema del oscilador armónico unidimensional de masa  $m$ , utilizando el método de Hamilton-Jacobi.

Sabemos que la Hamiltoniana del sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (12)$$

De acuerdo al Teorema 7.2 la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema es

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

Supongamos una solución a (13) de la forma  $F = F_1(q) + F_2(t)$ . Por lo tanto, (13) se convierte en

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dF_1}{dq} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = -\frac{dF_2}{dt} \quad (14)$$

Haciendo cada lado de la ecuación anterior igual a  $\alpha$ , encontramos

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dF_1}{dq} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha \quad (15)$$

$$\frac{dF_2}{dt} = -\alpha \quad (16)$$

Omitiendo las constantes de integración, las soluciones son

$$F_1 = \int \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{kq^2}{2}\right)} dq \quad (17)$$

$$F_2 = -\alpha t \quad (18)$$

Por tanto, la función generadora  $F$  es

$$F = \int \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{kq^2}{2}\right)} dq - \alpha t \quad (19)$$

Y de acuerdo a (2),  $q(t)$  se obtiene a partir de

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \int \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{kq^2}{2}\right)} dq - \alpha t \right\} \quad (20)$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha - \frac{kq^2}{2}}} - t \quad (21)$$

Y realizando la integral obtenemos que

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen}^{-1}(q\sqrt{k/2\alpha}) = t + \beta \quad (22)$$

Y despejando  $q$  obtenemos finalmente que

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \operatorname{sen} \sqrt{k/m}(t + \beta) . \quad (23)$$

Podemos además dar una interpretación física a la constante  $\alpha$  siguiendo el siguiente razonamiento:

El factor  $\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}$  debe corresponder justamente a la máxima amplitud  $A$  que el oscilador puede tener. Por otro lado, la energía total  $E$  de un oscilador armónico unidimensional de amplitud  $A$  está dada por

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k \left( \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \right)^2 = \alpha .$$

Es decir,  $\alpha$  es físicamente igual a la energía total  $E$  del oscilador armónico unidimensional.

#### BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

C.C. Yan, *Simplified derivation of the HJ eq.*, Am. J. Phys. 52, 555 (1984)

N. Anderson & A.M. Arthurs, *Note on a HJ approach to the rocket pb.*, Eur. J. Phys. 18, 404 (1997)

M.A. Peterson, *Analogy between thermodynamics and mechanics*, Am. J. Phys. 47, 488 (1979)

Y. Hosotani & R. Nakayama, *The HJ eqs for strings and p-branes*, hep-th/9903193 (1999)

## 8. VARIABLES ACCION-ANGULO

**Prólogo:** La ecuación de Hamilton-Jacobi nos proporciona un método de transformar un conjunto de variables  $q, p$  a un segundo conjunto de variables canónicas  $Q, P$ , siendo cada una de las variables canónicas una constante de movimiento.

Ahora, en este capítulo nosotros consideraremos un método, válido para ciertos tipos de movimiento, para transformar un conjunto de variables  $q, p$ , a un segundo conjunto de variables  $Q, P$ , no siendo al mismo tiempo las dos variables canónicas constantes de movimiento.

### CONTENIDO:

8.1 Sistemas separables

8.2 Sistemas cíclicos

8.3 Variables acción-ángulo

8.4 Movimiento en variables acción-ángulo

8.5 Importancia de las variables acción-ángulo

8.6 Ejemplo: el oscilador armónico

## 8.1 Sistemas separables.

Por sistemas separables nosotros entenderemos sistemas cuya Hamiltoniana no sea una función explícita del tiempo, es decir

$$H = H(q, p)$$

y para los cuales es posible encontrar una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo, de la forma

$$W(q, \alpha) = \sum_i W_i(q_i, \alpha) .$$

## 8.2 Sistemas cíclicos.

Sabemos que el estado de un sistema se encuentra caracterizado por un conjunto de coordenadas generalizadas  $q \equiv q_1, q_2, \dots, q_f$  y por el conjunto de momenta generalizados  $p \equiv p_1, p_2, \dots, p_f$ . Conforme el sistema se mueve, éste traza una órbita en el espacio  $q, p$  (el espacio cuyas coordenadas son las variables  $q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f$ ). De igual forma, el sistema traza una órbita en cada uno de los subespacios  $q_i, p_i$ . La órbita en cada uno de los planos  $q_i, p_i$  puede ser representada por una ecuación de la forma  $p_i = p_i(q_i)$  o por un par de ecuaciones  $p_i = p_i(t)$ ,  $q_i = q_i(t)$ . Si para cada valor de  $i$ , la órbita  $p_i = p_i(q_i)$  en el plano  $q_i - p_i$  es una curva cerrada, entonces nos referimos a tal sistema como un *sistema cíclico*. En la siguiente figura mostramos las dos posibilidades por las cuales un sistema puede ser cíclico. En la Figura 8.1a, el sistema es cíclico porque  $q_i$  oscila entre los límites definidos  $q_i = a$  y  $q_i = b$ ; en la Figura 8.1b, el sistema es cíclico porque  $q_i$  se mueve desde  $q_i = a$  hasta  $q_i = b$ , y luego inicia nuevamente en  $q_i = a$ .

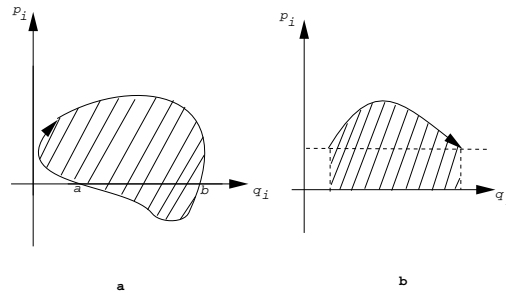


Fig. 8.1

Es necesario en este punto hacer dos importantes aclaraciones:

**Aclaración 1:** El término cíclico ha sido introducido solamente para simplificar la notación en las siguientes secciones. No debe interpretarse este término pensando que si el sistema es cíclico en cada uno de los subespacios  $q_i, p_i$ , entonces el sistema deba regresar a su estado original en el espacio  $q, p$ .

**Aclaración 2:** Si un sistema cíclico solamente tiene un grado de libertad, el tiempo requerido por el sistema para ejecutar un ciclo en el plano  $q - p$  es constante; por tanto el movimiento en el plano  $q - p$  será periódico en el tiempo. Si el sistema tiene mas de un grado de libertad, entonces, en general, el tiempo requerido para ejecutar un ciclo particular en uno de los espacios  $q_i, p_i$  no será una constante, sino que dependerá del movimiento de las otras coordenadas; por tanto, el movimiento en el espacio dado  $q_i, p_i$  no será periódico en el tiempo. Debe de tenerse cuidado en este punto, ya que *no es cierto que cada uno de los movimientos en cada plano  $q_i, p_i$  es periódico en el tiempo.*

### 8.3 Variables acción-ángulo.

Consideremos un sistema cíclico de  $f$  grados de libertad, cuyo estado dinámico está caracterizado por las variables canónicas  $q, p$ . Sea  $H(q, p)$  la Hamiltoniana del sistema, y sea

$$W(q, \alpha) \equiv \sum_i W_i(q_i, \alpha) ,$$

(donde  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$  son constantes) una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E .$$

Sea  $J \equiv J_1, J_2, \dots, J_f$  el conjunto de constantes definidas por las ecuaciones

$$J_i(\alpha) = \oint \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} dq_i , \quad (1)$$

donde la integral es sobre un ciclo completo para la variable  $q_i$ . Si nosotros usamos la función

$$W(q, \alpha) \equiv W[q, \alpha(J)]$$



$$\begin{aligned} &\equiv \sum_i W_i[q_i, \alpha(J)] \\ &\equiv \sum_i W_i(q_i, J) \end{aligned}$$

como una función generadora para una transformación canónica de las variables  $q, p$  a un nuevo conjunto de coordenadas  $w$ , y momenta  $J$ , es decir, si definimos las variables  $w$  y  $J$  por las ecuaciones de transformación

$$p_i = \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i, J)}{\partial q_i} \quad (2)$$

$$w_i = \frac{\partial W(q, J)}{\partial J_i} \quad (3)$$

entonces las nuevas coordenadas  $w_1, w_2, \dots, w_f$  son llamadas *variables ángulo*, y los nuevos momenta  $J_1, J_2, \dots, J_f$  son llamadas *variables acción*.

De la ecuación (2) obtenemos que

$$p_i(q_i, \alpha) = \frac{\partial W_i[q_i, J(\alpha)]}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} . \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en (1) obtenemos

$$J_i(\alpha) = \oint p_i(q_i, \alpha) dq_i . \quad (5)$$

La ecuación  $p_i = p_i(q_i, \alpha)$  es la ecuación de la proyección de la órbita  $p = p(q)$  sobre el subespacio  $p_i, q_i$ . La integral en el lado derecho de la ecuación (5) es por tanto el área encerrada dentro de la órbita, o bajo la órbita, como se ilustra por las regiones sombreadas en la Figura 8.1. Por tanto, la función  $J_i(\alpha)$  puede ser interpretada geoméricamente como el área barrida en el subespacio  $q_i, p_i$  durante un ciclo completo en este subespacio. Esta área depende de las constantes  $\alpha$  o equivalentemente de las condiciones iniciales y puede en general asumir cualquier valor <sup>14</sup>.

## 8.4 El movimiento de un sistema en términos de las variables de acción-ángulo.

Resumimos el movimiento de un sistema en términos de las variables de acción-ángulo en la siguiente teorema:

<sup>14</sup>Historicamente, el primer intento de pasar de la mecánica clásica a la mecánica cuántica consistió en asumir que el valor que  $J_i$  podía tomar no era completamente arbitrario, sino que debe ser un múltiplo de  $h/2\pi$ , donde  $h$  es la constante de Planck.

**Teorema 8.4.**

Consideremos un sistema ciclico separable de  $f$  grados de libertad cuyo estado dinámico está dado por las variables  $q, p \equiv q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f$ , y cuyo comportamiento dinámico está dado por el Hamiltoniano  $H(q, p)$ . Si nosotros transformamos a las variables de acción-ángulo  $J, w$ , entonces el Hamiltoniano  $H$  es una función de  $J$  solamente, es decir,

$$H = H(J)$$

y el movimiento del sistema está dado por

$$\begin{aligned} J_i &= \gamma_i \\ w_i &= \nu_i t + \phi_i, \end{aligned}$$

donde  $\gamma_i$  y  $\phi_i$  son constantes que están determinadas por las condiciones iniciales, y las  $\nu_i$  son constantes, llamadas *las frecuencias del sistema* y se encuentran definidas como

$$\nu_i = \left[ \frac{\partial H(J)}{\partial J_i} \right]_{J=\gamma_i}.$$

## 8.5 Importancia de las variables acción-ángulo

La importancia de las variables acción-ángulo radica en que proporcionan una técnica potente para la obtención de la frecuencia de un movimiento periódico de un movimiento sin hallar una solución completa del movimiento del sistema.

Lo anterior puede ser visto del siguiente argumento: Consideremos el cambio de  $w$  cuando  $q$  describe un ciclo completo, dado por

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq$$

Por otro lado, sabemos que

$$w = \frac{\partial W}{\partial J},$$

por lo que

$$\Delta w = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \\
&= \frac{d}{dJ} \oint p dq \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

El anterior resultado nos indica que  $w$  cambia en una unidad cuando  $q$  varía a lo largo de un período completo.

De la relación

$$w = \nu t + \phi ,$$

concluimos que en un período  $\tau$

$$\begin{aligned}
\Delta w &= 1 \\
&= \nu \tau ,
\end{aligned}$$

es decir, podemos identificar a la constante  $\nu$  con el recíproco del período,

$$\nu = \frac{1}{\tau} .$$

## 8.6 Ejemplo: El oscilador armónico simple

A partir del formalismo de las variables acción ángulo vamos a demostrar que la frecuencia  $\nu$  del oscilador armónico simple unidimensional está dada por  $\nu = \sqrt{k/m}/2\pi$ .

Dado que  $H$  es una constante de movimiento, la órbita en el espacio  $q - p$  está dada por

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E ,$$

donde  $E$  es la energía. Esta es la ecuación de una elipse con semiejes  $\sqrt{2mE}$  y  $\sqrt{2E/k}$ . El área encerrada por la elipse es igual al valor de la variable de acción  $J$ . Por tanto,

$$J = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} E .$$

Se sigue entonces que

$$H(J) = E = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} J$$

y la frecuencia está dada por

$$\nu = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}.$$

## 9. TEORÍA CANÓNICA DE PERTURBACIONES

**Prólogo:** Existen muchos problemas en la naturaleza que no pueden ser resueltos de manera exacta. Por esta razón, y tomando en cuenta el gran desarrollo experimentado por la informática, se ha puesto mucho interés en el desarrollo de métodos para hallar soluciones aproximadas. El método de perturbaciones se aplica cuando se tiene un problema físico que no se puede resolver exactamente, pero cuya Hamiltoniana difiere sólo ligeramente de la Hamiltoniana correspondiente a un problema que puede resolverse de manera exacta. A la diferencia entre ambas Hamiltonianas se le conoce como la *Hamiltoniana de la perturbación* y la teoría de perturbaciones está basada en la pequeñez de la misma.

### CONTENIDO:

- 9.1 Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo (con dos ejemplos)
- 9.2 Teoría de perturbaciones independiente del tiempo (con un ejemplo)

## 9.1 Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

La formulación de la mecánica clásica que simplifica más el desarrollo de la teoría de perturbaciones es la de Hamilton-Jacobi. Consideremos entonces que  $H_0(p, q, t)$  es la Hamiltoniana correspondiente al problema soluble o no perturbado, y que se ha solucionado mediante la función principal de Hamilton  $S(q, \alpha_0, t)$ , la cual genera una transformación canónica, de las coordenadas  $(p, q)$  a  $(\alpha_0, \beta_0)$ , en la que la nueva Hamiltoniana (o Kamiltoniana)  $K_0$  del sistema no perturbado, es nula. En símbolos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = K_0 = 0. \quad (1)$$

Ésta es la ecuación de Hamilton-Jacobi y hemos usado que  $p = \partial S / \partial q$ . Las coordenadas canónicas transformadas  $(\alpha_0, \beta_0)$  son entonces todas constantes en el caso no perturbado, ya que  $K_0 = 0$  y:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= -\frac{\partial K_0}{\partial \beta_0}, \\ \dot{\beta}_0 &= \frac{\partial K_0}{\partial \alpha_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Consideremos ahora la hamiltoniana del sistema perturbado como:

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t); \quad (\Delta H \ll H_0). \quad (3)$$

Aunque  $(\alpha_0, \beta_0)$  siguen siendo coordenadas canónicas (pues la transformación generada por  $S$  es independiente de la forma particular de la hamiltoniana), ya no serán constantes y la Kamiltoniana del sistema perturbado ( $K$ ) no será nula. Para no olvidar que en el sistema perturbado las coordenadas transformadas ya no son constantes, las denotaremos como  $\alpha$  y  $\beta$ , en vez de  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , que serían sus correspondientes valores constantes en el sistema no perturbado. En el sistema perturbado tenemos pues que:

$$K(\alpha, \beta, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = \left(H_0 + \frac{\partial S}{\partial t}\right) + \Delta H = \Delta H(\alpha, \beta, t). \quad (4)$$

Las ecuaciones de movimiento que satisfacen las variables transformadas del sistema perturbado son entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_i &= -\frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\beta_i} \\ \dot{\beta}_i &= \frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\alpha_i},\end{aligned}\tag{5}$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $n$  es el número de grados de libertad del sistema. Las ecuaciones anteriores son rigurosas. Si del sistema de  $2n$  ecuaciones se pudieran obtener  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  como función del tiempo, las ecuaciones de transformación  $(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$  darían  $p_i$  y  $q_i$  en función del tiempo y el problema estaría resuelto. Sin embargo, la solución exacta de las ecuaciones en (5) no suele ser menos difícil que la solución de las ecuaciones originales. De (5) vemos que aún cuando  $\alpha$  y  $\beta$  ya no son constantes, su variación con el tiempo es lenta, si suponemos que  $\Delta H$  cambia poco respecto a  $\alpha$  y  $\beta$ . Una primera aproximación a la variación temporal de  $(\alpha, \beta)$  se obtiene sustituyendo en los segundos miembros de (5) a  $\alpha$  y  $\beta$  por sus valores constantes o no perturbados; es decir:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{i1} &= -\left.\frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\beta_i}\right|_0 \\ \dot{\beta}_{i1} &= \left.\frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\alpha_i}\right|_0,\end{aligned}\tag{6}$$

donde  $\alpha_{i1}$  y  $\beta_{i1}$  representan las soluciones a primer orden de perturbación para  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , y las barras verticales con subíndice cero indican que después de la derivación deben sustituirse  $\alpha$  y  $\beta$  por sus valores constantes no perturbados. Hecho esto, las ecuaciones en (6) se pueden integrar para dar las  $\alpha_i$  y las  $\beta_i$  en función del tiempo (a primer orden). Luego, mediante las ecuaciones de transformación se obtienen  $p$  y  $q$  como función del tiempo en una primera aproximación. La aproximación de segundo orden se obtiene sustituyendo en los segundos miembros de (6) la primera aproximación de la dependencia de  $\alpha$  y  $\beta$  con respecto al tiempo. En general, la solución de perturbación de orden  $N$  se obtiene integrando las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{iN} &= -\left.\frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\beta_i}\right|_{N-1} \\ \dot{\beta}_{iN} &= \left.\frac{\partial\Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial\alpha_i}\right|_{N-1}.\end{aligned}\tag{7}$$

### **Ejemplo 1**

Consideraremos aquí el caso simple de una partícula libre, que más adelante

sujetaremos a una perturbación armónica simple. Este ejemplo, aunque trivial, servirá para ilustrar el procedimiento delineado antes. La Hamiltoniana no perturbada es:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}. \quad (8)$$

Puesto que  $H_0 \neq H_0(x)$ , es decir, como  $x$  es cíclica,  $p = \alpha_0$  es una constante en el sistema no perturbado. Recordando que  $p = \partial S / \partial x$  y sustituyendo en (1):

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Ahora bien, dado que el sistema es conservativo, resulta conveniente considerar una función principal de la forma:

$$S = \mathbf{S}(x) + F(t). \quad (10)$$

Esta clase de separación de variables, es especialmente útil cuando la Hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, en donde se propone que  $F(t) = -Et$ , con  $E$  como la energía total del sistema<sup>15</sup>. Con (10) en (9) tenemos que:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{d\mathbf{S}}{dx} \right)^2 = E, \quad \mathbf{S} = \sqrt{2mEx} = \alpha_0 x. \quad (11)$$

Y sustituyendo (11) en (10), junto con el hecho de que en este caso la Hamiltoniana es igual a la energía, tenemos que la función principal de Hamilton es:

$$S = \alpha_0 x - \frac{\alpha_0^2 t}{2m}. \quad (12)$$

Si el momentum transformado es  $\alpha_0$ , la coordenada transformada (que también es constante en el sistema no perturbado) es:

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_0} = x - \frac{\alpha_0 t}{m},$$

---

<sup>15</sup>Véase: Spiegel, Murraray R. *Mecánica Teórica*, pp. 315, 316.



de modo que la transformación generada por  $S$  está dada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} p &= \alpha_0, \\ x &= \frac{\alpha_0 t}{m} + \beta_0, \end{aligned} \quad (13)$$

que es la solución esperada para el movimiento de una partícula libre. Lo realizado hasta aquí sólo muestra el procedimiento para hallar las ecuaciones del movimiento mediante la formulación de Hamilton-Jacobi. Es hasta ahora que introduciremos una perturbación de la forma:

$$\Delta H = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (14)$$

o bien, en términos de las coordenadas transformadas, utilizando (13):

$$\Delta H = \frac{m\omega^2}{2} \left( \frac{\alpha t}{m} + \beta \right)^2. \quad (15)$$

Nótese que en la expresión anterior hemos suprimido ya los subíndices 0 de las coordenadas transformadas, pues estamos ya ocupándonos del sistema perturbado.

Sustituyendo (15) en (5):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -m\omega^2 \left( \frac{\alpha t}{m} + \beta \right), \\ \dot{\beta} &= \omega^2 t \left( \frac{\alpha t}{m} + \beta \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Las ecuaciones anteriores tienen una solución exacta y es de forma armónica, como cabe esperar. Para asegurarnos sólo derivamos respecto al tiempo la primera de las ecuaciones y llegaremos a que  $\alpha$  tiene una variación armónica simple, lo que también puede asegurarse de  $x$  en virtud de las ecuaciones de transformación dadas en (13), que siguen manteniendo su forma en el sistema perturbado (omitiendo, claro, los subíndices de las coordenadas transformadas). Sin embargo, nos interesa ilustrar el método de perturbaciones, así que consideremos que  $k$  (la constante elástica) es un parámetro pequeño y busquemos soluciones aproximadas de distintos órdenes de perturbación, sin perder de vista que las variables transformadas  $(\alpha, \beta)$  en el sistema perturbado dejarán de ser constantes. Dicho de otra manera, aún cuando  $(\alpha, \beta)$

contienen información referente a los parámetros del sistema no perturbado, el efecto de la perturbación es hacer variar estos parámetros con el tiempo.

La perturbación de primer orden se obtiene según está indicado de manera general en (6). Así que debemos sustituir en los segundos miembros de (16),  $\alpha$  y  $\beta$  por sus valores no perturbados. Para simplificar consideremos que  $x(t=0) = 0$  y por tanto que  $\beta_0 = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -\omega^2 \alpha_0 t, \\ \dot{\beta}_1 &= \alpha_0 \frac{\omega^2 t^2}{m},\end{aligned}\tag{17}$$

que luego de integrar nos conduce a:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2}, \\ \beta_1 &= \frac{\alpha_0 \omega^2 t^3}{3m}.\end{aligned}\tag{18}$$

Las soluciones para  $x$  y  $p$  a primer orden las obtenemos sustituyendo  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en las ecuaciones de transformación (13), de donde:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\alpha_0}{m\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right), \\ p &= \alpha_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right).\end{aligned}\tag{19}$$

Para generar la solución aproximada a un segundo orden de perturbación debemos hallar  $\dot{\alpha}_2$  y  $\dot{\beta}_2$ , según se indicó en (7), sustituyendo en los segundos miembros de (16),  $\alpha$  y  $\beta$  por  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  como fueron dadas en (18). Integrando  $\dot{\alpha}_2$  y  $\dot{\beta}_2$  y luego utilizando de nuevo las ecuaciones de transformación (13), llegamos a las soluciones de segundo orden para  $x$  y  $p$ :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\alpha_0}{m\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right), \\ p &= \alpha_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right).\end{aligned}\tag{20}$$

En el límite en que el orden de perturbación  $N$  tiende a infinito, obtenemos las soluciones esperadas y compatibles con las condiciones iniciales:

$$x \rightarrow \frac{\alpha_0}{m\omega} \sin \omega t, \quad p \rightarrow \alpha_0 \cos \omega t. \quad (21)$$

Las variables transformadas  $(\alpha, \beta)$  contienen información referente a los parámetros de la órbita sin perturbar. Por ejemplo, si consideramos como sistema no perturbado aquél correspondiente al problema de Kepler, un sistema adecuado de coordenadas  $(\alpha, \beta)$  podrían ser las variables  $(J, \delta)$  que son respectivamente la variable acción y el ángulo de fase que aparece en la variable ángulo  $w$  (recordar que  $w = \nu t + \delta$ , donde  $\nu$  es la frecuencia). Estas variables están relacionadas con los parámetros orbitales tales como el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación, etc.

El efecto de perturbación es hacer variar estos parámetros con el tiempo. Si la perturbación es pequeña, la variación de los parámetros durante un período del movimiento no perturbado también será pequeña. De modo que por cortos intervalos de tiempo el sistema se moverá a lo largo de una órbita, llamada *órbita osculatrix*, que es de la misma forma funcional que la del sistema no perturbado; sin embargo, los parámetros de esta órbita varían con el tiempo.

Los parámetros de la órbita osculatrix pueden variar con el tiempo de dos maneras:

- Variación periódica: el parámetro vuelve a su valor inicial después de un intervalo de tiempo que en primera aproximación suele ser el período del movimiento no perturbado. Estos efectos de la perturbación no alteran los valores medios de los parámetros y por tanto la trayectoria sigue siendo muy parecida a la órbita no perturbada. Estos efectos se pueden eliminar promediando la perturbación sobre un período del movimiento no perturbado.
- Variación secular: Al final de cada uno de los períodos orbitales sucesivos hay un incremento neto del valor del parámetro. Al cabo de muchos períodos los parámetros orbitales pueden ser muy diferentes de sus valores no perturbados. Rara vez interesa el valor instantáneo de la variación de algún parámetro, digamos la frecuencia, porque su variación es muy pequeña en la mayoría de casos en que funciona el formalismo de la teoría de las perturbaciones. (Esta variación es tan pequeña que resulta difícil, sino imposible, percibirla en uno solo período orbital, y por eso se mide sólo la variación secular después de varios períodos.)

## Ejemplo 2

Del problema de dos cuerpos tenemos que si al potencial de Kepler se le suma un potencial de la forma  $1/r^2$ , la órbita del problema acotado es una elipse que gira y cuyo periápsis está animado de precesión. Encontraremos aquí la velocidad de precesión, considerando un potencial perturbador algo más general:

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^n}, \quad (22)$$

donde  $n(\geq 2)$  es un entero, y  $h$  es tal que el segundo término del potencial sea una pequeña perturbación del primero. La Hamiltoniana de la perturbación será pues:

$$\Delta H = -\frac{h}{r^n}. \quad (23)$$

En el problema sin perturbar, la posición angular del periápsis en el plano de la órbita viene dada por la constante  $\omega = 2\pi w_2$ . En el caso perturbado:

$$\dot{\omega} = 2\pi \frac{\partial \Delta H}{\partial J_2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial l}, \quad (24)$$

donde hemos usado  $J_2 = 2\pi l$ . Además  $J_2$  y  $w_2$  son dos de las cinco constantes del movimiento a las que lleva el tratamiento del problema de Kepler mediante las variables de acción ángulo.

Necesitamos conocer el promedio de  $\dot{\omega}$  en un período de la órbita no perturbada  $\tau$ :

$$\langle \dot{\omega} \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \Delta H}{\partial l} dt = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Delta H dt \right) = \frac{\partial \langle \Delta H \rangle}{\partial l}. \quad (25)$$

Pero el promedio temporal de la Hamiltoniana no perturbada es:

$$\langle \Delta H \rangle = -h \left\langle \frac{1}{r^n} \right\rangle = -\frac{h}{\tau} \int_0^\tau \frac{dt}{r^n}. \quad (26)$$

Por otro lado, sabemos que  $l = mr^2(d\theta/dt)$ , de donde podemos despejar  $dt$  y sustituirlo en (27), con lo que

$$\begin{aligned}
\langle \Delta H \rangle &= -\frac{mh}{l\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^{n-2}} \\
&= -\frac{mh}{l\tau} \left( \frac{mk}{l^2} \right)^{n-2} \int_0^{2\pi} [1 + e \cos(\theta - \eta)]^{n-2} d\theta . \quad (27)
\end{aligned}$$

donde  $\eta$  es una fase constante,  $e$  es la excentricidad, y donde se ha expresado  $r$  en función de  $\theta$  haciendo uso de la ecuación general de la órbita (con el origen en un foco de la cónica correspondiente):

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} [1 + e \cos(\theta - \eta)] \quad (28)$$

En el caso en que  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta H \rangle &= -\frac{2\pi mh}{l\tau} , \\
\langle \dot{\omega} \rangle &= \frac{2\pi mh}{l^2\tau} . \quad (29)
\end{aligned}$$

En el caso en que  $n = 3$ :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta H \rangle &= -\frac{2\pi m^2 hk}{l^3\tau} , \\
\langle \dot{\omega} \rangle &= \frac{6\pi m^2 hk}{l^4\tau} . \quad (30)
\end{aligned}$$

Este último caso,  $n = 3$ , reviste una importancia especial, ya que la teoría de la Relatividad General predice una corrección del movimiento newtoniano del orden de  $r^{-3}$  precisamente. Tal predicción se sometió a prueba con el célebre problema de la precesión de la órbita de Mercurio. Sustituyendo los apropiados valores de período, masa, semieje mayor de la órbita (que va incluido en  $h$ ), etc., la ecuación (30) predice una velocidad media de precesión:

$$\langle \dot{\omega} \rangle = 42.98 \text{ arcsegundos/siglo} .$$

El valor medido es mucho mayor que el mencionado arriba (por un factor mayor que 100). Pero antes de hacer cualquier comparación deben eliminarse del valor medido, las contribuciones debidas a: *a*) el efecto conocido como la precesión de los equinoccios (movimiento del punto de referencia

de longitudes respecto a la galaxia), *b*) las perturbaciones de la órbita de Mercurio debido a la interacción con los otros planetas. Una vez eliminados estos efectos (de los cuales el primero es el de mayor peso), se debe obtener lo que sería la contribución al valor medido de  $\dot{\omega}$ , debido al efecto relativista. En 1973 se calculó esta última contribución en  $(41.4 \pm 0.9)$  arcsegundos/siglo, que es consistente con la predicción que se obtiene de (30).

## 9.2 Teoría de perturbaciones independiente del tiempo

Mientras que la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo busca la dependencia temporal de los, en un principio constantes, parámetros del sistema no perturbado, la teoría independiente del tiempo pretende hallar las cantidades que son constantes en el sistema perturbado. Esta teoría se aplica sólo a sistemas conservativos y periódicos (tanto en el estado perturbado, como en el no perturbado). Por ejemplo, se aplica en el caso de movimientos planetarios cuando se introduce cualquier perturbación conservativa al problema de Kepler (método de von Zeipel o de Poincaré).

Consideraremos aquí el caso de sistemas de un solo grado de libertad. Consideremos un sistema periódico con una Hamiltoniana independiente del tiempo de la forma:

$$H = H(p, q, \lambda), \quad (31)$$

donde  $\lambda$  es una constante que especifica la magnitud de la perturbación y se supone suficientemente pequeña. Asumimos que

$$H_0(p, q) = H(p, q, 0) \quad (32)$$

corresponde a un sistema que puede resolverse exactamente (sistema no perturbado), por medio del uso de las convenientes variables acción-ángulo  $(J_0, w_0)$ :

$$\begin{aligned} H_0(p, q) &= K_0(J_0) \\ \nu_0 &= \dot{w}_0 = \frac{\partial K_0}{\partial J_0}; \quad (w_0 = \nu_0 t + \delta_0). \end{aligned} \quad (33)$$

La transformación canónica que nos lleva de  $(p, q)$  a  $(J_0, w_0)$  es independiente de la forma particular de la Hamiltoniana. Entonces, la Hamiltoniana perturbada  $H(p, q, \lambda)$  puede escribirse como  $H(J_0, w_0, \lambda)$ . Debido a que la Hamiltoniana perturbada sí depende de  $w_0$ ,  $J_0$  ya no es constante. Por otro

lado, en principio, uno puede obtener nuevas variables acción-ángulo  $(J, w)$  apropiadas para el sistema perturbado, tales que:

$$\begin{aligned} H(p, q, \lambda) &= E(J, \lambda) \\ \nu &= \dot{w} = \frac{\partial E}{\partial J} \\ \dot{J} &= -\frac{\partial E}{\partial w} = 0; \quad (J = \text{constante}). \end{aligned} \quad (34)$$

Puesto que la transformación que conecta  $(p, q)$  a  $(J_0, w_0)$  es conocida, ahora debemos encontrar la transformación canónica  $S$ , que conecta  $(J_0, w_0)$  a  $(J, w)$ . Si asumimos que  $\lambda$  es pequeña, la transformación que buscamos no debe diferir mucho de la transformación identidad. La expansión de la función generadora que buscamos será entonces:

$$S = S(w_0, J, \lambda) = S_0(w_0, J) + \lambda S_1(w_0, J) + \lambda^2 S_2(w_0, J) + \dots \quad (35)$$

Para  $\lambda = 0$  requerimos que  $S$  sea la identidad; entonces hacemos:

$$S_0 = w_0 J. \quad (36)$$

Las transformaciones canónicas generadas por  $S$  son:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial S}{\partial J} = w_0 + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial J}(w_0, J) + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial J}(w_0, J) + \dots \\ J_0 &= \frac{\partial S}{\partial w_0} = J + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_0}(w_0, J) + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0}(w_0, J) + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Debido a que  $w_0$  es una variable ángulo (del sistema no perturbado), sabemos que  $\Delta w_0 = 1$  sobre un ciclo. Por otro lado, sabemos que las transformaciones canónicas tienen la propiedad de conservar el volumen en el espacio de fase. Por tanto, podemos escribir:

$$J = \oint pdq = \oint J_0 dw_0. \quad (38)$$

Integrando la segunda ecuación en (37) sobre una órbita del sistema perturbado, tenemos:

$$\oint J_0 dw_0 = \oint J dw_0 + \sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} dw_0, \quad (39)$$

y sustituyendo (39) en (38):

$$J = J\Delta w_0 + \sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} dw_0. \quad (40)$$

En vista de que  $\Delta w_0 = 1$ , debe cumplirse que:

$$\sum_{n=1} \lambda^n \oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} dw_0 = 0, \quad (41)$$

o bien que:

$$\oint \frac{\partial S_n}{\partial w_0} dw_0 = 0. \quad (42)$$

Además, la Hamiltoniana puede expandirse en  $\lambda$  como función de  $w_0$  y  $J_0$ :

$$H(w_0, J_0, \lambda) = K_0(J_0) + \lambda K_1(w_0, J_0) + \lambda^2 K_2(w_0, J_0) + \dots, \quad (43)$$

donde las  $K_i$  son conocidas, ya que  $H$  es una función conocida de  $w_0$  y  $J_0$  para una  $\lambda$  dada. Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} H(p, q, \lambda) &= H(w_0, J_0, \lambda) \\ &= E(J, \lambda), \end{aligned} \quad (44)$$

que es la expresión para la energía en las nuevas coordenadas de acción ángulo (donde  $J$  será constante y  $w$  será función lineal del tiempo).

Podemos también expandir  $E$  en potencias de  $\lambda$ :

$$E(J, \lambda) = E_0(J) + \lambda E_1(J) + \lambda^2 E_2(J) + \dots. \quad (45)$$

En virtud de (44) podemos igualar los coeficientes de las distintas potencias de  $\lambda$  en (43) y (45). Sin embargo, estas dos expresiones para la energía dependen de dos diferentes conjuntos de variables. Para resolver esto expresaremos  $H_0$  en términos de  $J$ , y esto se logra haciendo una expansión de Taylor de  $H(w_0, J_0, \lambda)$  respecto de  $J_0$  alrededor de  $J$ :



$$H(w_0, J_0, \lambda) = H(w_0, J, \lambda) + (J_0 - J) \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{(J_0 - J)^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial J^2} + \dots, \quad (46)$$

Las derivadas del desarrollo de Taylor son, hablando con propiedad, derivadas respecto a  $J_0$  calculadas en  $J_0 = J$ , si bien podemos escribirlas sin pérdidas de rigor, en la forma de derivadas con respecto a  $J$ , una vez sustituida  $J_0$  por  $J$  en  $H_0(J_0)$ . En la ecuación anterior, todo término que contiene a  $J_0$  debe reescribirse en términos de  $J$  haciendo uso de la transformación definida por (37) que conecta las coordenadas  $(J_0, w_0)$  con  $(J, w)$ . Así que, de la segunda ecuación en (37) obtenemos  $(J_0 - J)$ , que sustituido en (46) da:

$$H(w_0, J_0, \lambda) = H(w_0, J, \lambda) + \frac{\partial H}{\partial J} \left( \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_0} + \lambda^2 \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial J^2} \lambda^2 \left( \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right)^2 + O(\lambda^3). \quad (47)$$

Luego, podemos hacer uso de (43) para expresar  $H(w_0, J, \lambda) = H(w_0, J_0, \lambda) |_{J_0=J}$ , y sustituir luego en la ecuación (47) para obtener:

$$\begin{aligned} H(w_0, J_0, \lambda) &= K_0(J) + \lambda K_1(w_0, J) + \lambda^2 K_2(w_0, J) + \dots \\ &+ \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \left( \frac{\partial K_0(J)}{\partial J} + \lambda \frac{\partial K_1(w_0, J)}{\partial J} + \dots \right) \\ &+ \lambda^2 \left[ \frac{\partial K_0(J)}{\partial J} \frac{\partial S_2}{\partial w_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K_0}{\partial J^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right)^2 + \dots \right] \\ &\equiv E(J, \lambda) \\ &= E_0(J) + \lambda E_1(J) + \lambda^2 E_2(J) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Ahora, podemos resolver para los coeficientes  $E_i(J)$ ; esto nos dará la posibilidad de calcular la frecuencia del movimiento perturbado a distintos órdenes de perturbación. Puesto que la expansión de los términos de  $E_i$  no involucra una dependencia en  $w_0$ , entonces la aparición de  $w_0$  en (48) debe ser espuria. Las  $K_i(w_0, J)$  de (48) son funciones conocidas, mientras que las  $S_i(w_0, J)$  y las  $E_i(J)$  son desconocidas.

Igualando potencias de  $\lambda$  tenemos:

$$\begin{aligned} E_0(J) &= K_0(J) \\ E_1(J) &= K_1(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \frac{\partial K_0(J)}{\partial J} \\ E_2(J) &= K_2(w_0, J) + \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \frac{\partial K_1(w_0, J)}{\partial J} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right)^2 \frac{\partial^2 K_0(J)}{\partial J^2} + \frac{\partial S_2}{\partial w_0} \frac{\partial K_0(J)}{\partial J}. \end{aligned} \quad (49)$$

Vemos que, para determinar  $E_1$  necesitamos conocer  $S_1$  además de  $K_1$ . No debemos perder de vista que la  $E_i$  son constantes, pues son sólo funciones de  $J$  (que es una constante del movimiento). También debemos notar que  $\partial K_0/\partial J$  es un término independiente de  $w_0$  (pues  $K_0 = K_0(J) = K_0(J_0) |_{J_0=J}$ ). Si promediamos sobre  $w_0$  en ambos lados de la segunda ecuación en (49), obtenemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle E_1 \rangle \\ &= \langle K_1 \rangle + \frac{\partial K_0}{\partial J} \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial w_0} \right\rangle. \end{aligned} \quad (50)$$

Pero hemos visto ya que  $\langle \partial S_i/\partial w_0 \rangle = \oint (\partial S_i/\partial w_0) dw_0 = 0$ . Luego,

$$E_1 = \langle E_1 \rangle = \langle K_1 \rangle. \quad (51)$$

Sustituyendo (51) en el miembro izquierdo de la segunda ecuación de (49) y despejando luego  $(\partial S_1/\partial w_0)$ , tenemos que:

$$\frac{\partial S_1}{\partial w_0} = \frac{\langle K_1 \rangle - K_1}{\nu_0(J)}, \quad (52)$$

en donde hemos usado que  $\nu_0 = \partial K_0/\partial J$ .

La solución para  $S_1$  se encuentra por integración directa. En general, vemos que el procedimiento para hallar  $E_n$  es el que sigue (una vez asumido que se ha resuelto ya para  $E_{n-1}$ ):

- Promediar en ambos lados de la  $n$ -ésima ecuación de (49).
- Insertar el valor promediado de  $E_n$  que se halló, en la ecuación completa que se daba en (49) para  $E_n$  (es decir, la que había antes de promediar).
- La única expresión desconocida que queda entonces, será  $S_n$  que podrá obtenerse integrando en:

$$\frac{\partial S_n}{\partial w_0} = \text{función conocida de } w_0 \text{ y } J.$$

- Sustituir  $S_n$  en la ecuación completa para  $E_n$ .

Una vez hecho esto, se puede continuar para el orden de perturbación  $n + 1$ .

Según podemos ver la determinación de la energía a un orden particular  $n$  se determina sólo cuando se ha hallado  $S_{n-1}$ , y  $S_n$  puede determinarse sólo cuando se ha hallado  $E_n$ .

La teoría de perturbaciones independiente del tiempo, es muy similar al esquema de perturbaciones de Rayleigh y Schrödinger en la mecánica ondulatoria. En la teoría ondulatoria, se conoce  $E_n$  sólo si la función de onda se conoce a un orden  $n - 1$ . Y además, la función de onda de orden  $n$  se encuentra sólo cuando se ha calculado  $E_n$ .

## Bibliografía

- H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, 2a. ed. Versión española. Editorial Reverté S.A., 1992.
- R.A. Matzner and L.C. Shepley, *Classical Mechanics*, Prentice-Hall, Inc. U.S.A., 1991.
- R. Murray, *Mecánica Teórica*, Spiegel, Edición en español. McGraw-Hill S.A. de C.V. México, 1976.
- L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd. ed. Course of Theoretical Physics, Volume 1. Pergamon Press, Ltd. 1976.

## 10. INVARIANTES ADIABATICOS

**Prólogo:** Un invariante adiabático es una función de los parámetros y de las constantes del movimiento de un sistema, que permanece casi constante en el límite en el que los parámetros cambian infinitamente despacio en el tiempo, aunque ellos puedan en última instancia cambiar por grandes cantidades.

### **CONTENIDO:**

10.1 BREVE HISTORIA

10.1 GENERALIDADES

## 10.1 BREVE HISTORIA

La noción de invarianza adiabática se remonta a los primeros años de la teoría cuántica. Alrededor de 1910, quienes estudiaban la emisión y absorción de radiación, notaron que los átomos podían existir en estados estables en los que su energía estaba fija. Einstein llamó la atención acerca de la cantidad que permanecía casi invariante en un péndulo cuya longitud variaba continua y lentamente (la cantidad  $E/\nu$ ). Él sugirió que podrían existir cantidades similares asociadas con los sistemas atómicos, que determinarían la estabilidad de los mismos cuando estas cantidades adquirieran ciertos valores. Tales invariantes adiabáticas fueron luego encontradas por Ehrenfest y su uso condujo a la primitiva teoría cuántica de Bohr y Sommerfeld. Esta teoría trabajaba bien para los estados del hidrógeno, pero fracasaba cuando se le aplicaba a otros átomos. Más tarde, en 1925-6, surgió una teoría cuántica altamente exitosa, debida a Schrödinger, Heisenberg, Born y otros; esta teoría empleaba un enfoque diferente.

El tema de la invarianza adiabática surgió nuevamente después de varias décadas, en el estudio de iones y electrones en movimiento en el espacio. Este tema era del interés de científicos escandinavos que estudiaban el fenómeno de las auroras. Uno de ellos, H. Alfven, mostró en su libro *Electrodinámica Cósmica* que bajo condiciones apropiadas cierta combinación matemática de propiedades de los iones y electrones permanecían constantes a primer orden. Aparentemente, Alfven no se percató de que estaba tratando con la misma clase de invariantes adiabáticas definidas por Ehrenfest. Fueron L. Landau y E. Lifshitz quienes señalaron la relación que había con el tema de invariantes adiabáticas.

## 10.2 GENERALIDADES

Mostraremos primero, de una manera sencilla, cuál es la cantidad invariante adiabática en el caso del movimiento armónico simple. El método a seguir consistirá en mostrar que, en el límite de la variación infinitamente lenta de los parámetros, el invariante adiabática del sistema unidimensional se aproxima a una cantidad que se conserva exactamente en el correspondiente sistema bidimensional.

Consideremos un sistema de un grado de libertad, inicialmente conservativo y periódico, que contenga un parámetro  $a$  que será inicialmente constante. La variación lenta del parámetro no alterará la naturaleza periódica del movimiento. Por una variación lenta entendemos aquella en la que  $a$  varía ligeramente durante un período  $\tau$  del movimiento:

$$\tau(da/dt) \ll a . \quad (1)$$

Pero, aún cuando las variaciones de  $a$  sean pequeñas en un período cualquiera, al cabo de un tiempo suficientemente largo las propiedades del movimiento pueden experimentar cambios grandes.

Cuando el parámetro  $a$  sea constante, el sistema vendrá descrito por variables acción ángulo  $(w_0, J_0)$  tales que la Hamiltoniana será  $H = H(J_0, a)$ . Supongamos que la función generadora de la transformación  $(q, p) \rightarrow (w_0, J_0)$ , es de la forma:  $W^*(q, w_0, a)$ .

Cuando se deja variar  $a$  con el tiempo,  $(w_0, J_0)$  serán aún variables canónicas válidas pero  $W^*$  será función del tiempo a través de  $a$ . Entonces  $J_0$  no será constante y  $w_0$  ya no será más función lineal del tiempo. La Hamiltoniana apropiada será ahora:

$$\begin{aligned} K(w_0, J_0, a) &= H(J_0, a) + \frac{\partial W^*}{\partial t} \\ &= H(J_0, a) + \dot{a} \frac{\partial W^*}{\partial a}. \end{aligned} \quad (2)$$

El segundo miembro de la Hamiltoniana se puede ver como una perturbación y la dependencia temporal de  $J_0$  viene de:

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial w_0} = -\dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left( \frac{\partial W^*}{\partial a} \right). \quad (3)$$

Procediendo en una forma análoga a como se procede en la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, buscamos la variación a primer orden en el valor medio de  $\dot{J}_0$  a lo largo del período del movimiento no perturbado. Como  $a$  varía lentamente, podemos considerarla constante durante este intervalo y entonces podemos escribir:

$$\langle \dot{J}_0 \rangle = -\frac{1}{\tau} \int_{\tau} \dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left( \frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt = -\frac{\dot{a}}{\tau} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial w_0} \left( \frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \quad (4)$$

Puede demostrarse que  $W^*$  es una función periódica en  $w_0$ , y por consiguiente, tanto ella como su derivada respecto a  $a$ , pueden escribirse como una serie de Fourier:

$$\frac{\partial W^*}{\partial a} = \sum_k A_k e^{2\pi i k w_0}. \quad (5)$$

Sustituyendo (81) en (80):

$$\langle \dot{J}_0 \rangle = -\frac{\dot{a}}{\tau} \int_{\tau} \sum_k 2\pi i k A_k e^{2\pi i k w_0} dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \quad (6)$$

Como el integrando no tiene ningún término constante, la integral se anula. Luego,

$$\langle \dot{J}_0 \rangle = 0 + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \quad (7)$$

Por tanto,  $\langle \dot{J}_0 \rangle$  no tendrá variación secular de primer orden (o sea en  $\dot{a}$ ), que es una propiedad deseada de la invarianza adiabática. De modo que el término *casi constante* en nuestra definición de invariante adiabática, debe ser interpretada como *constante a primer orden*.

### Bibliografía complementaria

- L. Parker, *Adiabatic invariance in simple harmonic motion*, Am. J. Phys. 39 (1971) pp. 24-27.
- A.E. Mayo, *Evidence for the adiabatic invariance of the black hole horizon area*, Phys. Rev. D58 (1998) 104007 [gr-qc/9805047].

## 11. MECANICA DE SISTEMAS CONTINUOS

**Prólogo:** Todas las formulaciones de la mecánica tratadas hasta ahora han estado dirigidas al tratamiento de sistemas que tengan un número de grados de libertad finito o, como máximo, numerablemente infinito . Sin embargo, existen ciertos problemas mecánicos que entrañan sistemas continuos, como por ejemplo el problema de un sólido elástico en vibración. En él cada punto del sólido continuo participa en las oscilaciones y el movimiento total sólo puede describirse especificando coordenadas de posición de todos los puntos. No resulta difícil modificar las formulaciones anteriores de la mecánica para poder tratar dichos problemas. El método más directo consiste en aproximar el sistema continuo a uno que contenga partículas discretas y luego examinar como cambian las ecuaciones que describen el movimiento, cuando nos aproximamos al límite continuo.

### **CONTENIDO:**

11.1 Formulación Lagrangiana: de discreto a continuo.

11.2 Formulación Lagrangiana para sistemas continuos.

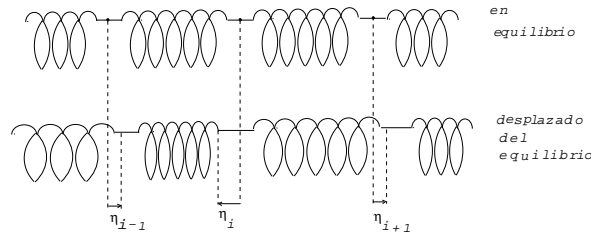
11.3 Formulación Hamiltoniana, parentesis de Poisson.

11.4 Teorema de Noether.



## 11.1 Formulación Lagrangiana: Transición de un sistema discreto a un sistema continuo.

Como uno de los casos mas sencillos en el que se puede pasar de un sistema discreto a uno continuo consideremos el de una varilla elástica infinitamente larga que efectúa pequeñas vibraciones longitudinales, es decir, desplazamientos oscilantes de las partículas de la varilla paralelos a su eje. Un sistema compuesto por partículas discretas que se aproxime a la varilla continua es una cadena infinita de puntos materiales iguales separados por distancias  $a$  y unidos por resortes uniformes sin masa de constante de rigides  $k$  (ver la figura).



Supondremos que los puntos materiales sólo pueden moverse a lo largo de la dirección de la cadena. Podemos ver que el sistema discreto es una extensión de la molécula poliatómica lineal tratada en el capítulo 6 de Goldstein. Podremos, pues, obtener las ecuaciones que describen el movimiento mediante las técnicas habituales para oscilaciones pequeñas. Representando por  $\eta_i$  el desplazamiento de la partícula  $i$ -ésima respecto a su posición de equilibrio, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2, \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa de cada partícula. La energía potencial correspondiente es la suma de las energías potenciales de cada resorte a consecuencia de hallarse estirado o comprimido respecto a su longitud natural:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la Lagrangiana del sistema

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i \left( m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right), \quad (3)$$

que también puede escribirse de la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[ \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i, \quad (4)$$

donde  $a$  es la separación de equilibrio entre puntos. Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para las coordenadas  $\eta_i$  resultan ser

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left( \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (5)$$

La forma particular de  $L$  de la ecuación (4) y las ecuaciones de movimiento correspondientes las hemos elegido por ser convenientes para efectuar el paso al límite a una varilla continua al tender a cero  $a$ . Esta claro que  $m/a$  se reduce a la masa por unidad de longitud  $\mu$  del sistema continuo, pero el valor límite de  $ka$  no resulta tan evidente. Recordemos que en el caso de una varilla elástica que cumpla la ley de Hooke, el alargamiento de la varilla por unidad de longitud es directamente proporcional a la fuerza o tensión ejercida sobre ella, relación que podemos escribir en la forma

$$F = Y\xi,$$

donde  $\xi$  es el alargamiento por unidad de longitud e  $Y$  es el módulo de Young. Ahora bien, el alargamiento de una longitud  $a$  de un sistema discreto, por unidad de longitud, será  $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i) / a$ . La fuerza necesaria para estirar el resorte esta cantidad es

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right),$$

por lo que  $ka$  debe corresponder al módulo de Young de la varilla continua. Al pasar del caso discreto al continuo, el índice entero  $i$  que identifica el punto material particular se convierte en la coordenada de posición continua  $x$ ; en vez de la variable  $\eta_i$  tenemos  $\eta(x)$ . Además, la cantidad

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

que figura en  $L_i$  tiende evidentemente al límite

$$\frac{d\eta}{dx},$$

cuando  $a$  tiende a cero. Por último, la suma extendida a un número discreto de partículas se convierte en una integral extendida a  $x$ , la longitud de una varilla, y la Lagrangiana (4) queda en la forma

$$L = \frac{1}{2} \int \left( \mu \dot{\eta}^2 - Y \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (6)$$

En el límite, cuando  $a$  tiende a cero, los dos últimos términos de la ecuación de movimiento (5) resultan ser

$$\text{Lim}_{a \rightarrow 0} \frac{-Y}{a} \left\{ \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\},$$

tomando de nuevo el límite cuando  $a$  tiende a cero la ecuación define claramente la segunda derivada de  $\eta$ . Por tanto, la ecuación de movimiento para la varilla elástica será

$$\mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} - Y \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0, \quad (7)$$

que es la conocida ecuación de onda en una dimensión con velocidad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (8)$$

La ecuación (8) es la conocida fórmula de la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales.

Este sencillo ejemplo es suficiente para ilustrar las características principales de la transición de un sistema discreto a uno continuo. El hecho más importante que hemos de comprender es el papel que desempeña la coordenada  $x$ . No se trata de una coordenada generalizada; sólo hace las veces de índice continuo que sustituye al índice discreto  $i$ . Al igual que cada valor de  $x$  corresponde una coordenada generalizada  $\eta(x)$ . Como  $\eta$  depende también de la variable continua  $t$ , debemos tal vez escribir con mayor precisión que  $\eta(x,t)$ . Indicando que  $x$ , al igual que  $t$ , puede considerarse como parámetro que entra en la lagrangiana. Si el sistema continuo fuese tridimensional y no unidimensional, como en este caso, las coordenadas generalizadas se distinguirían mediante tres índices continuos  $x, y, z$  y se escribirían en la forma  $\eta(x, y, z, t)$ . Notemos que las cantidades  $x, y, z, t$  son totalmente independientes unas de otras y sólo aparecen en  $\eta$  como variables explícitas. Las derivadas de  $\eta$  respecto a cualquiera de ellas podrán, pues, escribirse siempre en forma de derivadas totales sin ninguna ambigüedad. La ecuación (6) indica también que la lagrangiana aparece como integral para el índice continuo  $x$ ; en el caso tridimensional, la lagrangiana tendría la forma

$$L = \int \int \int \mathcal{L} dx dy dz, \quad (9)$$

donde  $\mathcal{L}$  se denomina densidad Lagrangiana. En el caso de vibraciones longitudinales de la varilla continua, la densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - Y \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\}, \quad (10)$$

y corresponde al límite continuo de la cantidad  $L_i$  que aparece en la ecuación (4). Es la densidad de Lagrangiana, más que la propia Lagrangiana, la que utilizaremos para describir el movimiento del sistema.

## 11.2 Formulación Lagrangiana para sistemas continuos

Notemos en la ec. (9) que la  $\mathcal{L}$  para la varilla elástica depende de  $\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t$ , la derivada espacial de  $\eta$ ,  $\partial\eta/\partial x$ ;  $x$  y  $t$  desempeñan un papel similar al

de los parámetros de esta. Si además de las interacciones entre vecinos más próximos hubiesen fuerzas locales,  $\mathcal{L}$  fuera función de la misma  $\eta$ . En general  $\mathcal{L}$  para todo sistema continuo, puede ser función explícita de  $x$  y  $t$ . Por tanto, la densidad de Lagrangiana para todo sistema continuo debe aparecer para todo sistema continuo unidimensional de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t \right). \quad (11)$$

La Lagrangiana total siguiendo la forma de la ec.(9) será

$$L = \int \mathcal{L} dx,$$

y el principio de Hamilton en el límite del sistema continuo adopta la forma

$$\delta I = \delta \int_1^2 \int \mathcal{L} dx dt = 0. \quad (12)$$

Del principio de Hamilton para el sistema continuo, deberá ser posible deducir el límite continuo de las ecuaciones de movimiento, para esto como en la sección 2-2 de Goldstein podemos obtener en el espacio  $\eta$  un camino variado de integración conveniente, eligiendo  $\eta$  entre una familia de funciones de  $\eta$  dependiente de un parámetro:

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha \zeta(x, t). \quad (13)$$

Donde  $\eta(x, t; 0)$  es la función correcta que satisface el principio de Hamilton y  $\zeta$  es una función cualquiera de buen comportamiento que se anule en los puntos extremos en  $t$  y en  $x$ . Si consideramos  $I$  función de  $\alpha$ , para que sea una extremal para la derivada de  $I$  respecto de  $\alpha$  se anulará en  $\alpha = 0$ . Ahora por derivación directa de  $I$  tenemos

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d\eta}{dt} \right) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d\eta}{dx} \right) dt \right\}. \quad (14)$$

Como la variación de  $\eta$ , es decir  $\alpha \zeta$ , se anula en los puntos extremos, integrando por partes según  $x$  y  $t$  obtenemos las relaciones

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d\eta}{dt} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) \frac{d\eta}{d\alpha} dt,$$

y

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d\eta}{dx} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \frac{d\eta}{d\alpha} dx.$$

De aquí el principio de Hamilton se podrá escribir de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \right\} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)_0 = 0. \quad (15)$$

Ahora debida a la naturaleza arbitraria del camino variado implica que la expresión entre llaves es cero:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (16)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación correcta de movimiento deducida del principio de Hamilton.

En el caso concreto de las vibraciones longitudinales en una varilla elástica, la forma de la densidad de Lagrangiana ec. (10) indica que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} = \mu \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} = -Y \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

Así pues, tal como queríamos, la ecuación de Euler-Lagrange (16) se reduce a la ecuación de movimiento (7).

La formulación de Lagrange que acabamos de desarrollar corresponde a sistemas continuos, evidentemente, se puede generalizar a sistemas bi-, tridimensionales y cuatridimensionales. Matemáticamente, conviene pensar en un espacio cuatridimensional de coordenadas  $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Para un manejo matemático más fácil introducimos la siguiente notación

$$\eta_{\rho,\nu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_\nu}; \quad \eta_{,j} \equiv \frac{d\eta}{dx_j}; \quad \eta_{i,\mu\nu} \equiv \frac{d^2\eta_i}{dx_\mu dx_\nu}. \quad (17)$$

Con esta notación, y haciendo la extensión a un espacio cuatridimensional, la forma general de la densidad de Lagrangiana (11) toma la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\nu}, \xi_\nu). \quad (18)$$

La Lagrangiana total es entonces una integral extendida al espacio tridimensional:

$$L = \int \mathcal{L}(dx_i). \quad (19)$$

Al principio de Hamilton corresponde una integral extendida a una región de un espacio cuatridimensional

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}(dx_\mu) = 0, \quad (20)$$

donde la variación de las  $\eta_\rho$  se anulan en la superficie  $S$  de contorno de la región de integración. La deducción de las correspondientes ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange tiene lugar simbólicamente como antes. Consideremos un sistema de funciones

$$\eta_\rho(x_\nu; \alpha) = \eta_\rho(x_\nu) + \alpha \zeta(x_\nu)$$

variadas de un solo parámetro que se reducen a  $\eta_\rho(x_\nu)$  cuando el parámetro  $\alpha$  tiende a cero. La variación de  $I$  equivale a hacer igual a cero la derivada de  $I$  respecto a  $\alpha$  es decir:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_{\rho,\nu}}{\partial \alpha} \right) (dx_\mu) = 0. \quad (21)$$

Integrando por partes la ec. (21), tenemos

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} (dx_\mu) + \int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_{\rho,\nu}}{\partial \alpha} \right) = 0,$$

y tomando el límite cuando  $\alpha$  tiende a cero la expresión anterior se reduce a:

$$\left( \frac{dI}{d\alpha} \right)_0 = \int (dx_\mu) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \left( \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right)_0 = 0. \quad (22)$$

Ahora debido a la naturaleza arbitraria de la variación de cada tipo de  $\eta_\rho$  significa que la ecuación (22) cuando sea nulo cada uno de los corchetes por separado esto es:

$$\frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0. \quad (23)$$

Las ecuaciones (23) representan un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para las cantidades campo, que tiene tantas ecuaciones cuantos valores diferentes de  $\rho$  haya.

Ejemplo: Dada la densidad Lagrangiana para un campo acústico

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \dot{\vec{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \vec{\eta} - \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\eta})^2 \right).$$

$\mu_0$  es la densidad másica de equilibrio y  $P_0$  la presión de equilibrio del gas. El primer término de  $\mathcal{L}$  es la densidad de energía cinética, mientras que los términos restantes representan el cambio que sufre la energía potencial del gas por unidad de volumen a consecuencia del trabajo efectuado sobre el gas o por el curso de las contracciones y expansiones que son la marca de las vibraciones acústicas,  $\gamma$  es el cociente entre los calores molares a presión y a volumen constante obtener las ecuaciones de movimiento.

Solución:

Con la notación cuadrimensional, la densidad de Lagrangiana queda en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \eta_{i,0} \eta_{i,0} + 2P_0 \eta_{i,i} - \gamma P_0 \eta_{i,i} \eta_{j,j}) . \quad (24)$$

De la ecuación (23) se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\mu_0 \eta_{j,00} - \gamma P_0 \eta_{i,ij} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Volviendo a la notación vectorial, las ecuaciones (25) toman la forma

$$\mu_0 \frac{d^2}{d\vec{\eta}} dt^2 - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \vec{\eta} = 0. \quad (26)$$

Ahora utilizando el hecho de que en vibraciones de pequeña amplitud la variación relativa de la densidad del gas esta dado por la ecuación

$$\sigma = -\nabla \cdot \vec{\eta}.$$

Ahora aplicando la divergencia y utilizando la ecuación anterior obtenemos

$$\nabla^2 \sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 0$$

la cual es una ecuación de onda tridimensional, siendo

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$$

la velocidad del sonido en los gases.

## 11.3 Formulación Hamiltoniana, paréntesis de Poisson.

### 11.3.1 Formulación Hamiltoniana

La formulación de Hamilton para sistemas continuos se hace en forma parecida como se hace para sistemas discretos. Para indicar el procedimiento volvamos a la cadena de puntos materiales tratada anteriormente, donde para cada  $\eta_i$  hay una cantidad de movimiento canónica

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (27)$$

La Hamiltoniana del sistema será, entonces

$$H \equiv p_i \dot{\eta}_i - L = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L, \quad (28)$$

o sea

$$H = a \left( \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right). \quad (29)$$

Recordando que en límite cuando  $a$  tiende a cero,  $L \rightarrow \mathcal{L}$  y la suma de la ecuación (29) se convierte en una integral por lo que el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right). \quad (30)$$

Las cantidades de movimiento canónicas individuales  $p_i$ , dadas por la ecuación (27), se anulan en el límite de la continuidad, pero podemos definir una densidad de cantidad de movimiento  $\pi$  que permanezca finita:

$$\text{Lim}_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a} \equiv \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} . \quad (31)$$

La ecuación (30) tiene la forma de integral espacial de una densidad de Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  definida por

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L} . \quad (32)$$

Aun cuando se pueda introducir así una formulación de Hamilton de manera directa para campos clásicos, démonos cuenta de que el procedimiento singulariza la variable tiempo a la que habrá que darle un tratamiento especial. Contrasta, pues con el desarrollo que hemos dado a la formulación de Lagrange en el cual se trataban simétricamente las variables independientes del tiempo y espaciales. Por esta razón, el método de Hamilton, se tratará en forma un tanto distinta.

La vía evidente para la generalización a un campo tridimensional descrito por cantidades campo  $\eta_\rho$  es la siguiente:

Se define una cantidad de movimiento canónica

$$\pi_\rho(x_\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} . \quad (33)$$

Donde las cantidades  $\eta_\rho(x_i, t)$ ,  $\pi_\rho(x_i, t)$  juntas, definen el espacio fásico de infinitas dimensiones que describe el campo clásico y su desarrollo en el tiempo.

Análogamente como en el sistema discreto podemos hallar un teorema de conservación para  $\pi$  que sea algo parecido al correspondiente al de cantidad de movimiento canónico de sistemas discretos. Si una cantidad de campo dada  $\eta_\rho$  es cíclica es decir que  $\mathcal{L}$  no contenga explícitamente a  $\eta_\rho$ , la ecuación de campo de Lagrange presenta el aspecto de enunciado de la existencia de una corriente conservativa:

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} = 0$$

o sea

$$\frac{d\pi_\rho}{dt} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = 0 . \quad (34)$$

Se sigue que si es cíclica  $\eta_\rho$ , existe una cantidad integral que se conservativa

$$\Pi_\rho = \int dV \pi_\rho(x_i, t) .$$

La generalización para la densidad de la ecuación (32) para una densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H}(\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho, x_\mu) = \pi_\rho \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}, \quad (35)$$



donde se supone que se puede eliminar la dependencia funcional de  $\dot{\eta}_\rho$  por inversión de las ecuaciones de definición (33). De esta definición se deduce que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} = \dot{\eta}_\rho + \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} = \dot{\eta}_\rho \quad (36)$$

en virtud de la ecuación (33). Análogamente obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}. \quad (37)$$

Ahora utilizando las ecuaciones de Lagrange en la ec.(37) queda como

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = -\frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} \right) = -\dot{\pi}_\rho - \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right). \quad (38)$$

Debido a la aparición de  $\mathcal{L}$  aun no tenemos una forma útil. Sin embargo, haciendo una deducción análoga a la de los términos  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho}$  y  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho}$  para  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}}$  tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} = \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \quad (39)$$

Por lo tanto sustituyendo (39) en (38) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) = -\dot{\pi}_\rho. \quad (40)$$

Las ecuaciones (36) y (40) las podemos expresar con una notación más próxima a la de las ecuaciones de Hamilton para un sistema discreto introduciendo la noción de derivada funcional definida en la forma

$$\frac{\delta}{\delta \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial}{\partial \psi_{,i}}. \quad (41)$$

Como  $\mathcal{H}$  no es función de  $\pi_{\rho,i}$  las ecuaciones (36) y (40) se pueden escribir en la forma

$$\dot{\eta}_\rho = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho}, \quad \dot{\pi}_\rho = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho}. \quad (42)$$

Ahora con la misma notación las ecuaciones de Lagrange (23) toman la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_\rho} = 0. \quad (43)$$

Sin embargo, la ventaja casi única de la derivada funcional estriba en la semejanza resultante con un sistema discreto. Por otra parte, sorprende el tratamiento paralelo de las variables temporal y espaciales.

### 11.3.2 Paréntesis de Poisson

Podemos obtener otras propiedades de  $\mathcal{H}$  desarrollando la derivada total respecto al tiempo de la ecuación (35), recordando que hay que considerar que  $\dot{\eta}_\rho$  es función de  $\eta_\rho, \eta_{\rho,j}, \pi_\rho$  y  $\pi_\mu$ . Tenemos, entonces que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho + \pi_\rho \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

En la expresión el segundo término y el cuarto se aniquilan debido a la definición (33), por lo que la derivada se simplifica quedando

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (44)$$

Por otra parte, considerando  $\mathcal{H}$  función de  $\eta_\rho, \eta_{\rho,j}, \pi_\rho$  y  $\pi_\mu$ , la derivada total respecto al tiempo es

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (45)$$

donde la expresión se escribió de tal manera que facilite la comparación con el segundo miembro de la ecuación (44), donde usando las ecuaciones (36), (37) y (39) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (46)$$

la cual es análoga a la correspondiente para sistemas discretos.

En cambio no se cumple que las derivadas total y parcial respecto al tiempo no son, en general iguales. Utilizando las ecuaciones de movimiento de hamilton (ec. (36) y (40)) e intercambiando los ordenes de derivación, la ecuación (45) se puede escribir como

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Ahora utilizando la ecuación (46) y combinando términos tenemos finalmente

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dx_i} \left( \dot{\eta}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (47)$$

que es lo mas que podemos aproximarnos a la ecuación correspondiente para sistemas discretos.

Por otra parte cuando  $\mathcal{L}$  no contenga a  $t$  explícitamente, tampoco la contendrá  $\mathcal{H}$  esto implica la existencia de una corriente conservativa y por lo tanto la conservación de una cantidad integral, en este caso

$$H = \int \mathcal{H} dV. \quad (48)$$

Así pues, si  $\mathcal{H}$  no es función explícita del tiempo, la cantidad que se conserva no es  $\mathcal{H}$ , sino la cantidad integral  $H$ .

La Hamiltoniana no es más que un ejemplo de funciones que son integrales de volumen de densidades. Podemos formular directamente un formalismo general para la derivada respecto al tiempo de dichas cantidades integrales. Consideremos una cierta densidad  $\mathcal{U}$  que sea función de las coordenadas del espacio fásico  $(\eta_\rho, \pi_\rho)$ , de sus gradientes espaciales y posiblemente de  $x_\mu$ :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\eta_\rho, \pi_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_{\rho,i}, x_\mu) . \quad (49)$$

La cantidad integral correspondiente es

$$U(t) = \int \mathcal{U} dV \quad (50)$$

donde la integral de volumen se extiende a todo el espacio limitado por la superficie de contorno sobre la cual se anulan  $\eta_\rho$  y  $\pi_\rho$ . Derivando  $U$  respecto al tiempo tenemos en general,

$$\frac{dU}{dt} = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_{\rho,i}} \dot{\pi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\} dV . \quad (51)$$

Consideremos un término tal como

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d \dot{\eta}_\rho}{dx_i} .$$

Ahora integrando por partes, considerando que  $\eta_\rho$  y las derivadas se anulan en las superficies de contorno, tenemos

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = - \int dV \dot{\eta}_\rho \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) .$$

Para el término en  $\dot{\pi}_{\rho,i}$  se hace un procedimiento similar. Sustituyendo las expresiones obtenidas y agrupando coeficientes de  $\dot{\eta}$  y de  $\dot{\pi}_\rho$  respectivamente, y usando la notación de derivada funcional la ecuación (51) se reduce a

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\} . \quad (52)$$

Por último, introduciendo las ecuaciones de movimiento canónicas (42), tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\} + \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} . \quad (53)$$

La primera integral del segundo miembro corresponde claramente a la forma de corchete de Poisson. Si  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{W}$  son dos funciones de densidad, estas

consideraciones nos sugieren la definición del corchete de Poisson de las cantidades integrales como

$$[U, W] = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\}. \quad (54)$$

Definamos también la derivada parcial de  $U$  respecto a  $t$ , mediante la siguiente expresión

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (55)$$

La ecuación (53) podrá entonces escribirse en la forma

$$\frac{dU}{dt} = [U, H] + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (56)$$

que corresponde precisamente, en esta notación a la ecuación para sistemas discretos. Como por definición, el corchete de Poisson de  $H$  consigo misma es nulo, la ecuación (46) se concretará en

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (57)$$

que es la forma integral de la ec. (47). Así pues, el formalismo de corchetes de Poisson aparece como consecuencia de la formulación de Hamilton. Pero no podemos llevar a cabo una descripción por corchetes de Poisson de la teoría de campos en correspondencia paso a paso con la de los sistemas discretos.

Sin embargo, hay una manera de tratar los campos clásicos que provee casi todo lo de la formulación de Hamilton y de corchetes de Poisson de la Mecánica para sistemas discretos. La idea fundamental de este tratamiento es sustituir la variable espacial continua o el índice continuo por un índice discreto numerable.

El requisito de que  $\eta$  se anule en los extremos es una condición de contorno que se podría realizar físicamente colocando la varilla entre dos paredes perfectamente rígidas. Entonces, la amplitud de oscilación se puede representar mediante una serie de Fourier:

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sin \frac{2\pi n(x-x_1)}{2L}. \quad (58)$$

En vez del índice continuo  $x$  tenemos el índice discreto  $n$ . Podremos utilizar esta representación de  $x$  solamente cuando  $\eta(x)$  sea una función regular, cosa que sucede en la mayoría de cantidades de campo físicas.

Supondremos que sólo hay una cantidad campo real  $\eta$  que se puede desarrollar en serie de Fourier tridimensional de la forma

$$\eta(\vec{r}, t) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{k=0} q_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (59)$$

Aquí,  $\vec{k}$  es un vector de onda que solo puede tomar módulos y direcciones discretos de manera que en una dimensión lineal dada sólo encaje un número entero (o a veces semientero) de longitudes de onda. Decimos que  $\vec{k}$  tiene un espectro discreto. El subíndice escalar  $k$  representa una cierta ordenación del sistema de índices enteros que se utiliza para enumerar los valores discretos de  $\vec{k}$ ;  $V$  es el volumen del sistema, el cual aparece en forma de factor de normalización.

La ortogonalidad de las exponenciales en todo el volumen se puede enunciar mediante la relación

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} dV = \delta_{k,k'} . \quad (60)$$

En realidad, los valores permitidos de  $k$  son aquellos para los cuales se satisface la condición (60), y los coeficientes  $q_k(t)$  están dados por

$$q_k(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \eta(\vec{r}, t) dV . \quad (61)$$

De manera análoga para la densidad de cantidad de movimiento canónica tenemos

$$\pi(\vec{r}, t) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k p_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (62)$$

con  $p_k(t)$  definido como

$$p_k(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \pi(\vec{r}, t) dV . \quad (63)$$

Tanto  $q_k$  como  $p_k$  son cantidades integrales. Podemos, pues, buscar los corchetes de Poisson de dichas cantidades. Como las exponenciales no contienen las cantidades campo tenemos, por la ecuación (54)

$$\begin{aligned} [q_k, p_{k'}] &= \frac{1}{V} \int dV e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left\{ \frac{\delta\eta}{\delta\eta} \frac{\delta\pi}{\delta\pi} - \frac{\delta\pi}{\delta\eta} \frac{\delta\eta}{\delta\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{V} \int dV e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

o sea, por la ecuación (60),

$$[q_k, p_{k'}] = \delta_{k,k'} . \quad (64)$$

De la definición de los corchetes de Poisson resulta evidente que

$$[q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0 . \quad (65)$$

La dependencia temporal de  $q_k$  se hallará a partir de

$$\dot{q}_k(t) = [q_k, H] = \frac{1}{V^{1/2}} \int dV e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left\{ \frac{\delta\eta}{\delta\eta} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta} \frac{\delta\eta}{\delta\pi} \right\}$$

o sea

$$\dot{q}_k(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} . \quad (66)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \int dV \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \frac{\partial\pi}{\partial p_k} \quad (67)$$

por lo que obtenemos

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_k} = \frac{1}{V^{1/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} . \quad (68)$$

Comparando las ecuaciones (67) y (66) tenemos

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k} . \quad (69)$$

De manera similar podemos obtener la ecuación de movimiento para  $p_k$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} . \quad (70)$$

Así las cantidades  $p_k$  y  $q_k$ , obedecen pues, las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

## 11.4 Teorema de Noether

Ya hemos visto múltiples veces que las propiedades de la Lagrangiana (o de la Hamiltoniana) implican la existencia de cantidades conservativas. Así, si la Lagrangiana no contiene explícitamente una coordenada particular de desplazamiento, se conserva la correspondiente cantidad de movimiento canónica. La ausencia de dependencia explícita de la coordenada significa que la Lagrangiana no queda afectada por una transformación que altere el valor de dicha coordenada; se dice que es invariante o es simétrica ante la transformación dada.

La simetría ante una transformación de coordenadas se refiere a los efectos de una transformación infinitesimal de la forma

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (71)$$

donde la variación  $\delta x_\mu$  puede ser función de las demás  $x_\nu$ . El teorema de Noether considera también el efecto de una transformación de las propias cantidades campo, la cual podemos escribir en la forma

$$\eta(x_\mu) \rightarrow \eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \delta\eta_\rho(x_\mu). \quad (72)$$

Aquí  $\delta\eta_\rho(x_\mu)$  mide el efecto de las variaciones de  $x_\mu$  y de  $\eta_\rho$  y puede ser función de las demás cantidades campo  $\eta_\lambda$ . La variación de una de las variables campo en un punto particular del espacio  $x_\mu$  es una cantidad diferente  $\bar{\delta}\eta_\rho$ :

$$\eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \bar{\delta}\eta_\rho(x_\mu). \quad (73)$$

La descripción de las transformaciones en función de variaciones infinitesimales a partir de las cantidades no transformadas nos indica que solo estamos tratando con transformaciones continuas. Así la simetría ante la inversión en tres dimensiones no será una de las simetrías a las que se pueda aplicar el teorema de Noether. A consecuencia de las transformaciones tanto de las coordenadas como de las cantidades campo, la lagrangiana aparecerá, en general, como función diferente de las variables campo y de las coordenadas del espacio y tiempo:

$$\mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) \rightarrow \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \quad (74)$$

La versión del teorema de Noether que vamos a presentar no constituye la forma más general posible pero facilita la deducción sin restringir de manera importante el ámbito de aplicación del teorema ni la utilidad de las conclusiones. Supondremos que se cumplen tres condiciones:

1. El cuadriespacio es euclídeo. Este requisito, restringe el espacio-tiempo relativista al espacio de Minkowski, que es complejo pero euclideo.
2. La densidad de lagrangiana presenta la misma forma funcional para las cantidades transformadas que para las cantidades originales, es decir,

$$\mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathcal{L}(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \quad (75)$$

3. La magnitud de la integral de acción es invariante ante la transformación, es decir,

$$I' \equiv \int_{\Omega'} (dx_\mu) \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu). \quad (76)$$

La combinación de las ecuaciones (75) y (76) nos da el requisito

$$\int_{\Omega'} (dx_\mu) \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) = 0. \quad (77)$$

De la condición de invariancia, la ecuación (77) adopta la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} dx_\mu \mathcal{L}'(\eta', x_\mu) - \int_{\Omega} dx_\mu \mathcal{L}(\eta, x_\mu) \\ &= \int_{\Omega} dx_\mu [\mathcal{L}'(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu)] + \int_S \mathcal{L}(\eta) \delta x_\mu dS_\mu = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Aquí  $\mathcal{L}(\eta, x_\mu)$  es una abreviatura de la dependencia funcional total,  $S$  es la superficie tridimensional de la región  $\Omega$  y  $\delta x_\mu$  es de hecho el vector diferencia entre puntos de  $S$  y los puntos correspondientes de la superficie transformada  $S'$ . La última integral se puede transformar mediante el teorema de

la divergencia cuadrimensional con lo que tendremos para la condición de invarianza

$$0 = \int_{\Omega} dx_{\mu} \left\{ \left[ \mathcal{L}(\eta', x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta, x_{\mu}) \right] + \frac{d}{dx_{\mu}} (\mathcal{L}(\eta, x_{\mu}) \delta x_{\nu}) \right\}. \quad (79)$$

Ahora usando la ecuación (73), el término entre los corchetes puede escribirse en primera aproximación en la forma

$$\mathcal{L}(\eta'_{\rho}(x_{\mu}), \eta'_{\rho,\nu}(x_{\mu}), x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta_{\rho}(x_{\mu}), \eta_{\rho,\nu}(x_{\mu}), x_{\mu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho}} \bar{\delta} \eta_{\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \bar{\delta} \eta_{\rho,\nu}.$$

Utilizando las ecuaciones de campo de Lagrange

$$\mathcal{L}(\eta', x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta, x_{\mu}) = \frac{d}{dx_{\nu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \bar{\delta} \eta_{\rho} \right).$$

Luego la condición de invarianza (79) aparece en la forma

$$\int (dx_{\mu}) \frac{d}{dx_{\nu}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \bar{\delta} \eta_{\rho} - \mathcal{L} \delta x_{\nu} \right\} = 0, \quad (80)$$

que ya tiene la forma de una ecuación de corriente conservativa.

Sin embargo resulta útil desarrollar algo más la condición especificando la forma de la transformación infinitesimal en función de  $R$  parámetros infinitesimales  $\varepsilon_r, r = 1, 2, \dots, R$ , tales que las variaciones de  $x_{\mu}$  y  $\eta_{\rho}$  sean lineales en los  $\varepsilon_r$ :

$$\delta x_{\nu} = \varepsilon_r X_{r\nu}, \quad \delta \eta_{\rho} = \varepsilon_r \Psi_{r\rho}. \quad (81)$$

Sustituyendo estas condiciones en la ecuación (80) obtenemos

$$\int \varepsilon_r \frac{d}{dx_{\nu}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} (dx_{\mu}) = 0.$$

Como los parámetros  $\varepsilon_r$  son arbitrarios, existen  $r$  corrientes conservativas con teoremas de conservación diferenciales:

$$\frac{d}{dx_{\nu}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} = 0. \quad (82)$$

Las ecuaciones (82) constituyen la principal conclusión del teorema de Noether, el cual dice pues, que si el sistema tiene propiedades de simetría tales que se cumplan las condiciones (1) y (2) para transformaciones del tipo indicado en las ecuaciones (81), existirán  $r$  cantidades conservativas.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

R.D. Kamien, *Poisson bracket formulation of nematic polymer dynamics*, cond-mat/9906339 (1999)