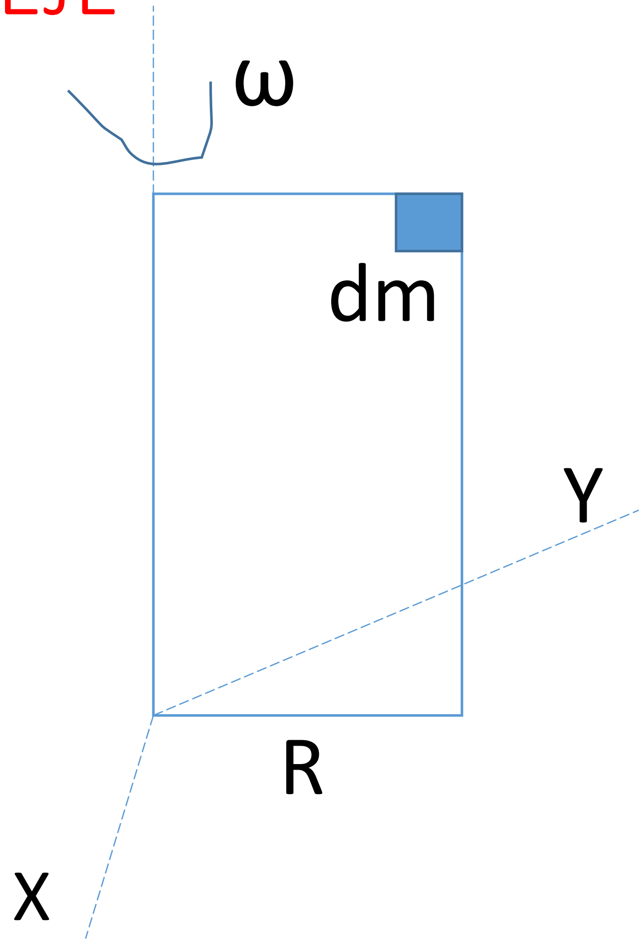
ECUACION DINÁMICA DE ROTACIÓN PURA DE UN CUERPO RIGIDO ALREDEDOR DE UN EJE

- Suponiendo un cuerpo rígido que gira con velocidad angular ω

alrededor del eje Z que permanece fijo al cuerpo.

$$dL = (\, dm\, R^2)\, \omega$$



integrando sobre todo el cuerpo rígido se obtiene:

$$L = (\, I\,)\, \omega$$

- $I = \int R^2 \ dm$

Es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto de un eje fijo que pasa por un punto fijo de un sistema inercial

Le ecuación dinámica de rotación

Pura alrededor del eje Z denominada también segunda ley de Newton para la rotación

$\sum \mathrm{T} = I \ \alpha$ donde α es la aceleración angular respecto del eje Z .

Para rotación y traslación simultanea

El torque momento de inercia y la aceleración son evaluados respecto del eje fijo que pasa por el centro de masa

- ECUACIÓN DINÁMICA DE TRASLACIÓN PURA DE UN CUERPO RÍGIDO

$$\sum_{ext} F = M \ a_c$$

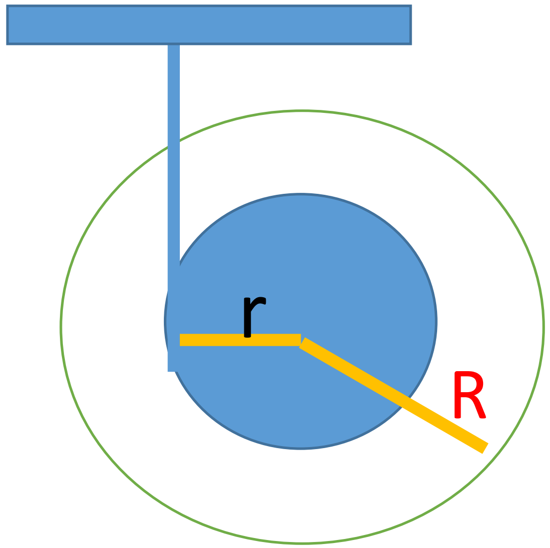
En esta ecuación a es la aceleración del centro de masa del cuerpo rígido. Denominada segunda ley de newton para la traslación de un cuerpo rígido .

Para la rotación y traslación simultanea

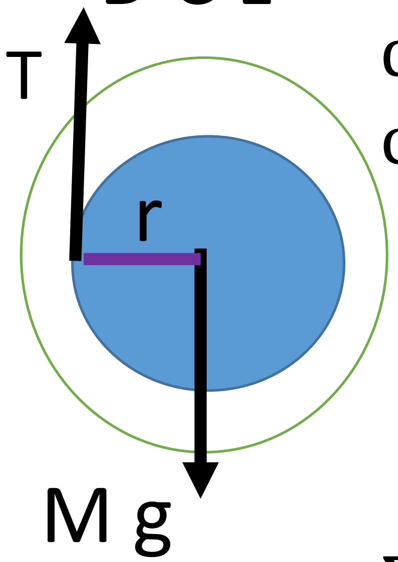
La fuerza se considera aplicada al centro de masa

$$a = \alpha \ R$$

Ejemplo . La polea compuesta de masa M = 0.5 Kg y momento de Inercia I = 4 * 10 (exp -2) kg m2. (relativo al centro de masa) mostrada en la figura desciende linealmente al ser soltada del reposo. Hallar la aceleración angular y la tensión de la cuerda . Si g = 10 m/s2 y r = 0.2 m



D C L



En este caso aplicaremos la ecuaciones que rigen la rotación y traslación de cuerpos rígidos.

$\sum T_0 = I\,\alpha$ (I) Rotación pura

$T\,r = I\,\alpha$ (II) Para nuestro caso

$\sum F_{ext} = M\,a$ (III) Traslación del centro

$M\,g - T = M\,a$ (IV) para nuestro caso

a = α r (V)

$de\ la\ ecuacion\ \ cuatro\ \ y\ cinco$

$$M\ g - I\frac{\alpha}{r} = M\ \ \alpha\ \mathrm{r}$$

$$M\ g = \alpha\ (\frac{I}{r} + \ M\ \ \mathrm{r}\ )$$

$$M\frac{g}{(\frac{I}{r} + \ M\ \ \mathrm{r})} = \alpha$$

$$\frac{5}{0.10 + 0.2} = \alpha = 16.6 \text{ rad /s}$$

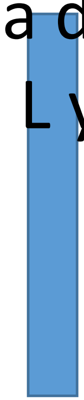
$T =$ Iα/ r = 0.04 *16.6/0.2

T = 3.32 N

a = 16.6 * 0.2 = 3.32 m / s2

Momentos de Inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa de cuerpos rígidos de densidad constante

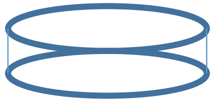
Varilla delgada de largo L y masa M



$$I = \frac{1}{12} M L^2$$

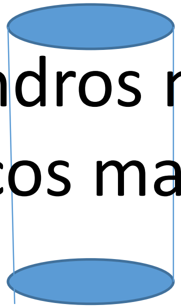
Esfera de masa M y radio R

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$



Anillos o cilindros de paredes delgadas

$$I = M R^2$$



Cilindros macizos
Discos macizos

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

ENERGÍA CENÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO CON TRASLACION Y ROTACION SIMULTANEA

Es la suma de la energía cinética debido a la traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación

$$E_K = \frac{1}{2}\,M\,v^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

ENERGÍA MECÁNICA DE UN CUERPO RÍGIDO

$$E_M = \frac{1}{2}\, M\, v^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 + \mathrm{M\ g\ Y}$$

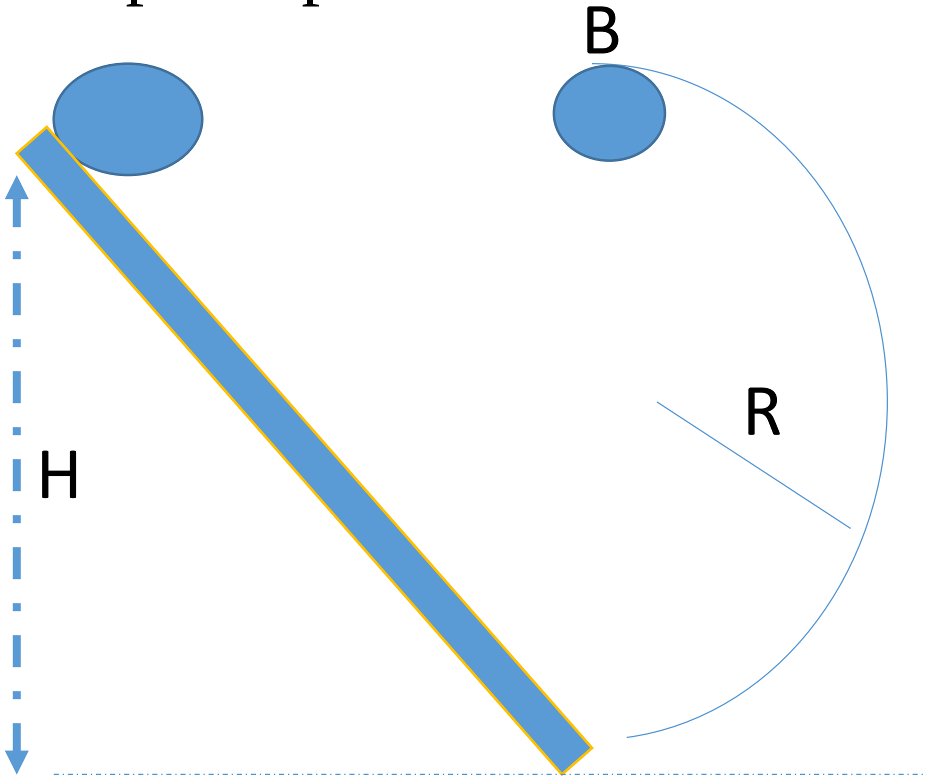
Donde Y es la altura del centro de masa respecto del nivel de referencia e MgY es la energía potencial del cuerpo rígido. Y los otros dos sumando son la energía cinética de traslación y rotación respectivamente.

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA MECÁNICA DE UN CUERPO Rígido

$$W_{fex} = \frac{1}{2}M{v_f}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega_f^2\, 2^2 + Mg\, Y_f - \frac{1}{2}M{v_i}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega_i^2\, 2^2 + Mg\, Y_i$$

La energía mecánica del cuerpo rígido se conservará cuando el lado izquierdo de esta ecuación se anule o cuando actúan sobre el cuerpo rígido fuerzas externas conservativas. Como la de un resorte por ejemplo .

La esfera maciza de radio r rueda sin deslizar por la rampa mostrada en la figura. Si parte del reposo en A . Determinar la altura H a que debe estar la esfera para que al pasar por B la reacción de la rampa sobre la esfera se anule



Solución :

Haciendo un DCL en el punto B de la esfera la únicas fuerzas que actúan son : el peso, la fuerza de rozamiento y la normal. de estas la normal no realiza trabajo, la fuerza de rozamiento evita que el cuerpo deslice solo obliga a rotar; en esta condición el punto de contacto entre la superficie y la esfera esta en reposo instantáneo . La fuerza de rozamiento no realiza trabajo , por lo que el trabajo de las fuerzas es cero.

$N + Mg \ = M \ \ v2 \ /(R - r \ )$ ecuación dinámica de traslación

Donde N es la reacción de la rampa v es la velocidad lineal del centro de masa de la esfera en B y (R-r) es la distancia del centro de la circunferencia (por donde pasa en todo momento la fuerza centrípeta) al centro de masa de la esfera.

Si N es cero

$$g(R - r \ ) \ = \ v2 \qquad \text{I}$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía para el cuerpo rígido.

En el punto A no hay energía cinética de traslación y rotación por lo que la energía mecánica en A es Ea = M g (H+ r)

En el punto B VB = V , ω B = V /r , YB = 2 R- r por lo que la energía mecánica es .

$$E_B = \frac{1}{2} M v_B{}^2 + \frac{1}{2}\ I\ \omega_B^2\ + Mg\ Y_B = \frac{1}{2} Mv\ \ {}^2 + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2}{5}\mathrm{M\ r2}\right)v^2}{\mathrm{r2}} + Mg\ (2R - r)$$

$E_A = E_B$

$$\mathrm{M\ g\ (\ H+\ r\ )} = \frac{1}{2} Mv\ \ {}^2 + \frac{1}{5}\frac{(\mathrm{M}\ )v^2}{} + Mg\ (2R - r)\ \ = \frac{1}{10} Mv\ \ {}^2 + Mg\ (2R$$

$$\mathrm{g\ (\ H+\ r\ )} = \frac{7}{10} v\ \ {}^2 + g\ (2R - r) \qquad II$$

$$remplazando\ \ la\ ecuacion\ I\ en\ 2\ \ se\ tiene$$

$$(\ \mathrm{H+\ r}\ ) = \frac{7}{10}\ (\ R - r) +\ (2R - r)\quad =$$

$$H = \frac{7}{10}\,(R - r) + (2R - r) \quad - \mathrm{r} \;= \frac{7}{10}\,(R - r) + 2\,(R - r)$$

$$H = \frac{7}{10}\,(R - r) + \frac{20}{10}\,(R - r)$$

$$H = \frac{27}{10}\,(R - r)$$

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

$$\sum \mathrm{T}i = \frac{d}{dt} L$$

Si los torques externos se anulan el momento angular del cuerpo rígido se conserva es decir

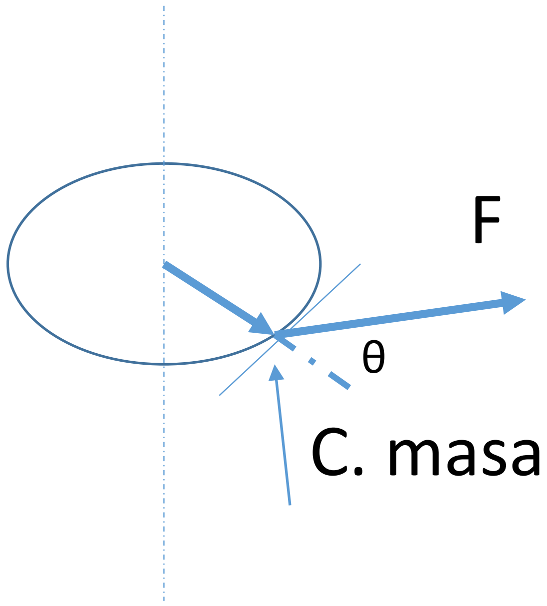
$$L_i = L_f$$

Y si el sistemas de cueros rígidos gira alrededor de un eje que permane ce fijo la conservación del momentun angular exige escribir la ecuación

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

TRABAJO REALIZADO EN UNA ROTACIÓN PURA ALREDEDOR DE UN EJE

La figura muestra el centro de masa de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo al cuerpo por acción de una fuerza externa F. El trabajo realizado por F cuando el centro de masa gira sobre la circunferencia de radio r un pequeño ángulo dθ (cuando se desplaza un elemento de trayectoria ds = rdθ) es



$$dW = F\,ds\ \ sen\,\theta = F\,r\,d\theta\ \ sen\,\theta$$

$$dW = (\,F\,r\,sen\,\theta)\,d\theta = \mathrm{T}d\theta$$

$$W = \int_{\theta i}^{\theta f} = \mathrm{T}d\theta$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{I}\ \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\ \frac{d\omega}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt} = I\ \omega\ \frac{d\omega}{d\theta}$$

Remplazando esta ecuación en la anterior se tiene

$$W = \int_{\theta i}^{\theta f} \mathrm{Td\theta} = \int_{\theta i}^{\theta f} \mathrm{I}\ \omega\ \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\ I\ \omega_f^2 - \frac{1}{2}\ I\ \omega_i^2$$

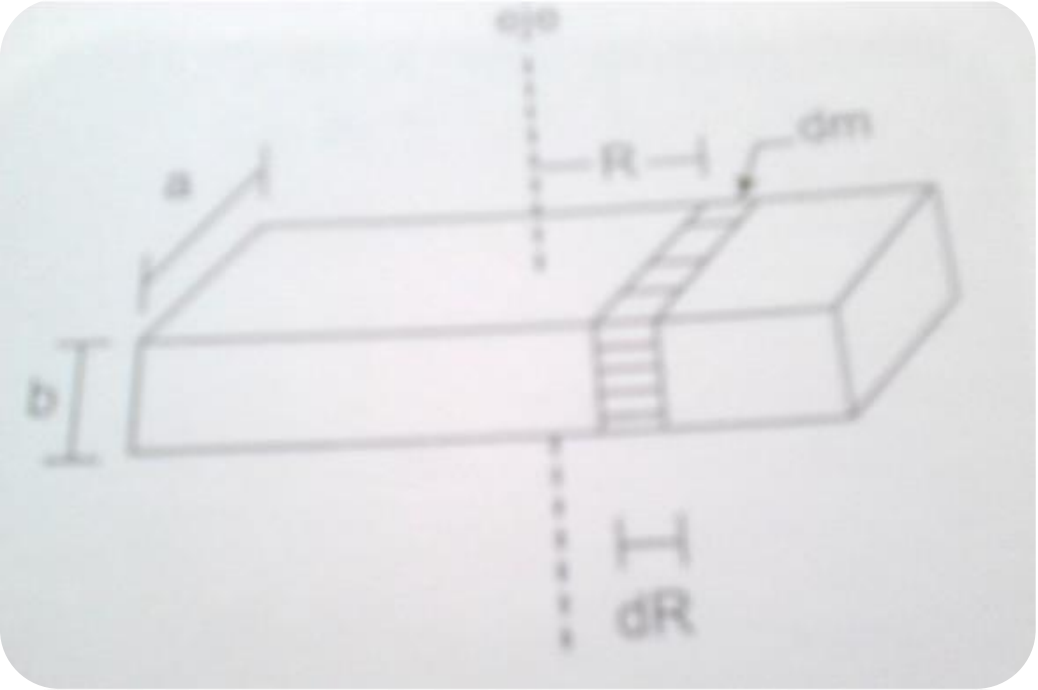
El trabajo del torque que actúa sobre el cuerpo rígido es igual a la diferencia de valores que toma la energía cinética rotacional entre los puntos inicial y final

Teorema de Steiner (o de los ejes paralelos)

El momento de inercia I de un cuerpo rígido respecto aun eje arbitrario que pasa por el origen de coordenadas es igual al momento de inercia respecto a un eje que pasa por su centro de masa Ic , mas la masa total del cuerpo multiplicada por la distancia rc entre los ejes elevada al cuadrado .

$$I = I_c + M\, r_c^2$$

1. Hallar el momento de inercia de una barra homogénea de longitud L y masa M, respecto de un eje que pasa por su centro de geométrico que coincide con su centro de masa.



$I = \int R^2 \, dm = \int R^2 \rho \, dV$

$I = \rho \int R^2 ab \, dR$ eligiendo como limites -L/2 a L/2 se tiene

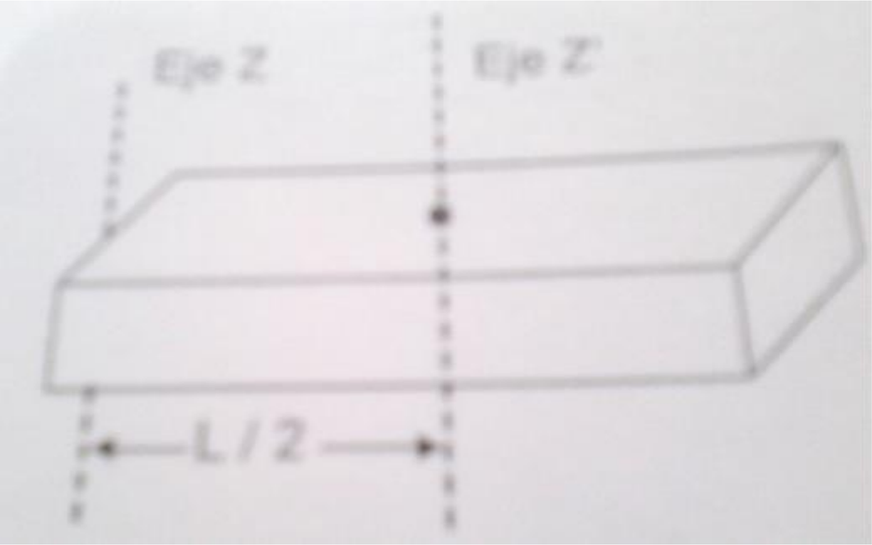
$I = \rho \, ab \, R^3/3$ desde -L/2 a L/2

$I = \rho \, ab \, L^3/12$

$\rho = M/V = M / ab \, L$

$I = M \, L^2/12$

2. Calcular el momento de inercia de una barra homogénea de longitud L y masa M respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos



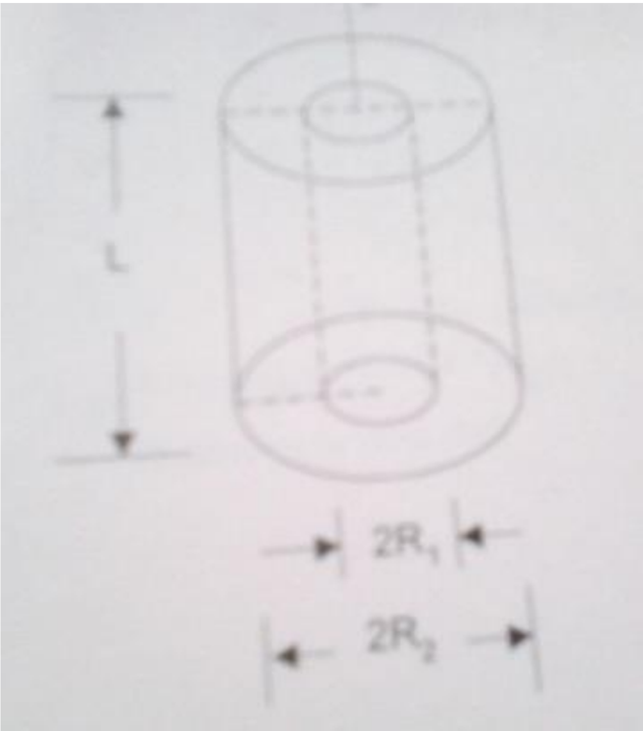
Por el teorema de Steiner tendremos :

$$I = \frac{M\,L^2}{12} + M\,\frac{L^2}{4} = \frac{M\,L^2}{3}$$

$$Ic = \frac{1}{12}\,M\,L^2$$

$$r_c = \frac{L}{2}$$

3. Hallar el momento de inercia del cilindro hueco homogéneo mostrado en la figura



$$I = \int R^2\ dm$$

$I = \int R^2$ ρ dV =ρ$\int R^2$ L(2 Π R d R)

I = ρ L(2 Π) $\int R^3$dR con limites desde R1 a R2

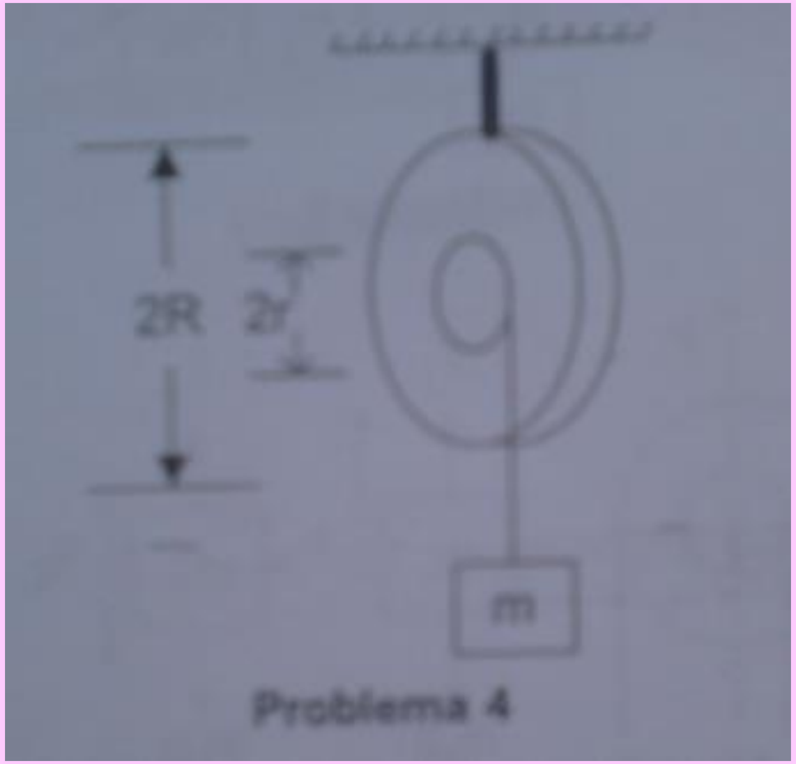
I = ρ L(2 Π) R^4/4 con limites desde R1 a R2

I = ρ L Π $(R^4 2 - R^4 1)/2$

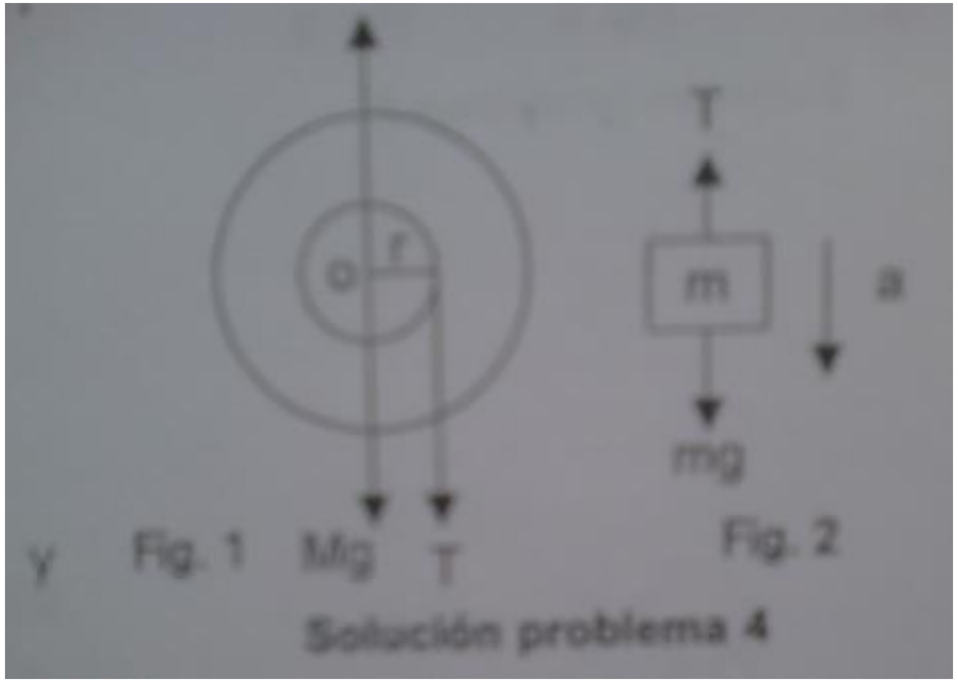
I = ρ L Π $(R^2 2 - R^2 1)(R^2 2 + R^2 1)/2$

I = $(\mathrm{M})(R^2 2 + R^2 1)/2$

4. La polea compuesta de momento de inercia I mostrada en la figura puede girar libremente alrededor del eje horizontal fijo que pasa por su centro . Se enrolla un hilo en el canal de radio r en su extremo libre se ata una masa m . Hallar la aceleración angular de la polea, la aceleración lineal, y la tensión en la cuerda. I = 0.473 kg + m2 m = 0.3 kg r = 0.3 y g = 10 m/ s2



Solución . Haciendo un DCL de la polea y la masa se tiene



Aplicando las ecuaciones dinámicas se tiene

$$\sum T_0 = I\,\alpha \quad \text{(I)} \quad \text{Rotación pura}$$

$$T\,r = I\,\alpha \quad (II)$$

$$\sum F_{ext} = F - T - M\,g = 0 \quad \text{(III) polea}$$

$$\sum F_i = m\,g - T = m\,a \quad \text{IV} \quad \text{para la masa m}$$

$$a = \alpha\, r \qquad (\text{V})$$

De estas ecuaciones se obtiene que $\alpha = 1.8$ rad / s 2 a = 0.54 m/s2 y T = 2.8 N