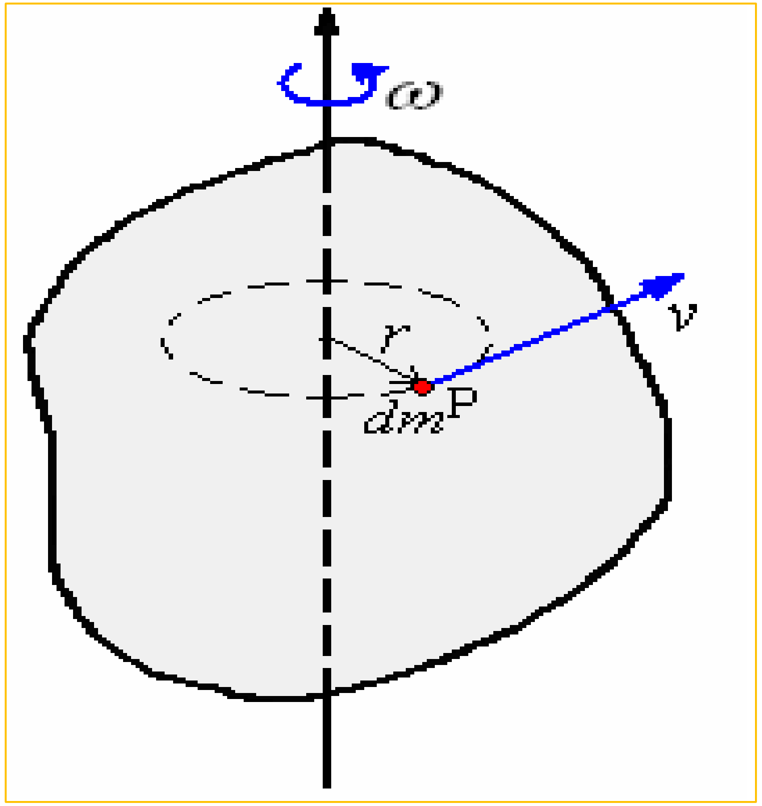
TRABAJO Y ENERGIA EN ROTACIÓN.

Consideremos un cuerpo que gira alrededor de un eje tal como se muestra en la figura. La energía cinética de un elemento de masa *dm* que gira a una distancia *r* del eje de rotación es:



$$dK = \frac{1}{2} dm v^2, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \quad dK = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 r^2$$

Integrando.

$$K = \int dK = \int_M \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$$

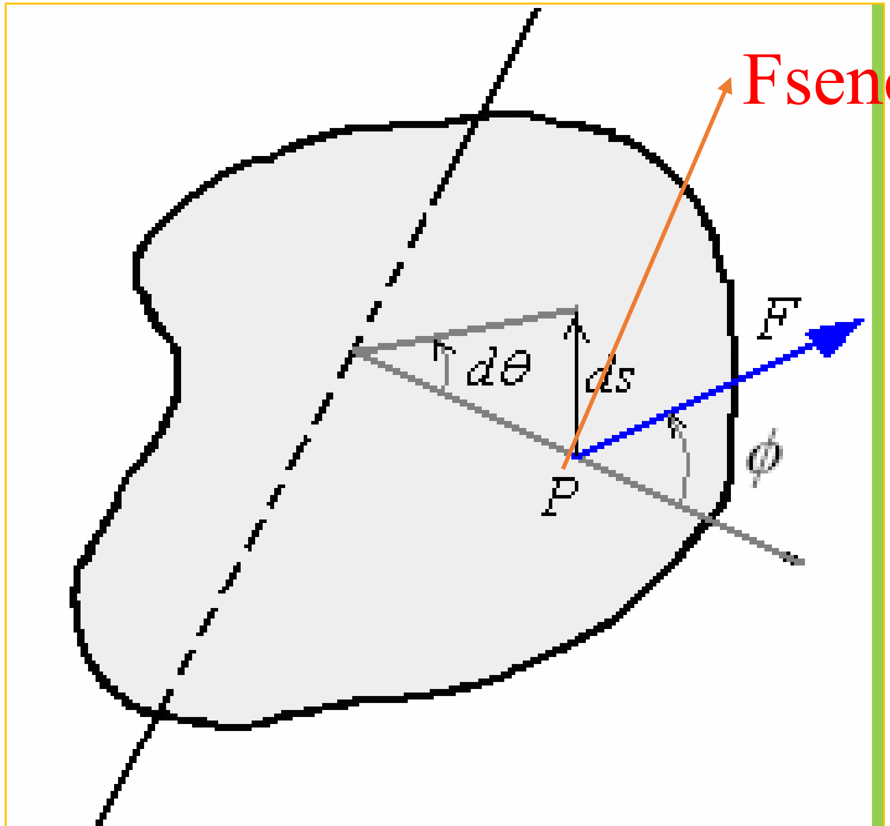
como ω es constante.

$$K = \int dK = \frac{1}{2} \omega^2 \int_M r^2 dm$$

El término integral es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Para relacionar la energía cinética, al trabajo efectuado sobre el cuerpo por un torque τ . Supongamos que se aplica una fuerza externa única *F*, que actúa en el punto P del cuerpo.



El trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que el cuerpo gira recorriendo una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$ en un tiempo dt es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\text{sen}\phi\, r d\theta$$

Como $F\text{sen}\phi\, r$ es el torque de la fuerza F alrededor del origen se puede escribir el trabajo realizado para la rotación infinitesimal como:

$$dW = \tau d\theta$$

Cuando el cuerpo gira en torno a un eje fijo bajo la acción de un torque. El cambio de su energía cinética durante el intervalo *dt* se puede expresar como:

$$dK = \frac{dK}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)dt$$

$$= I\omega\frac{d\omega}{dt}dt = I\omega\alpha dt = I\alpha\,\omega dt$$

Como

$\tau = I\alpha$ y $d\theta = \omega dt$

Obtenemos:

$$dK = \tau\, d\theta = dW$$

Si se integra esta expresión se obtiene el trabaj total

$$W_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

$$= \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= K_2 - K_1 = \Delta K$$

"El trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía cinética de rotación".

Por la analogía que existe entre las expresiones para el movimiento lineal y el movimiento angular, podemos decir que un torque será conservativo a condición que exista una función potencial $U = U(\theta)$ de tal modo que el trabajo efectuado por el torque τ sufre un desplazamiento angular

$(\theta_2 - \theta_1)$ es la diferencia $\left(U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)}\right)$.

Así pues se deduce que:

$$U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)} = K_2 - K_1$$

ó $K_1 + U_{(\theta_1)} = K_2 + U_{(\theta_2)} = \text{constante}$

Cuando el sistema no es conservativo

$$W_{\text{NO CONSERVATIVO}} = \left(K_1 + U_{(\theta_1)}\right) - \left(K_2 + U_{(\theta_2)}\right)$$

POTENCIA

La rapidez con que se realiza este trabajo es:

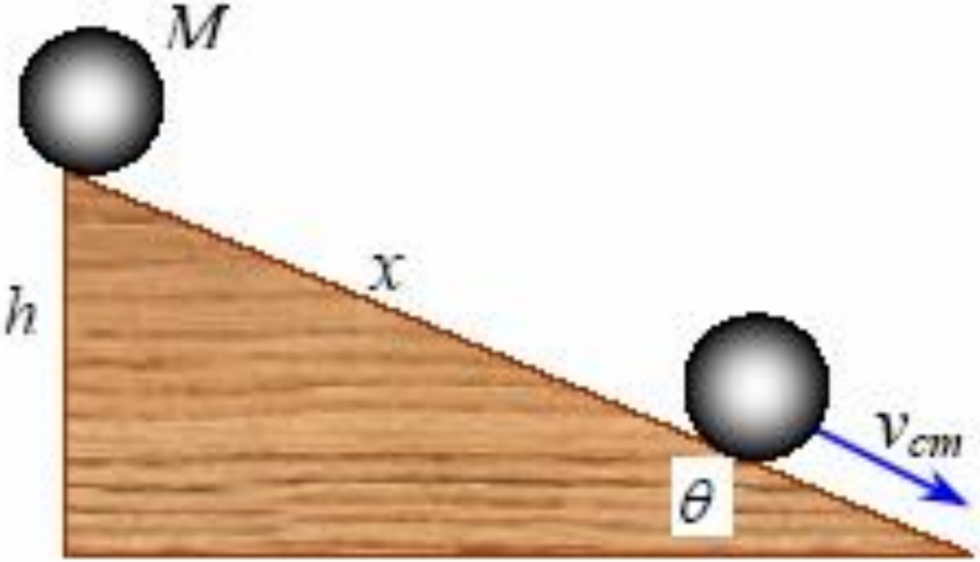
$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

Expresión que corresponde a la potencia instantánea.

$$P = \tau \omega$$

Ejemplo 1. Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa *M* que rueda por un plano inclinado θ y rugoso.

Solución : Aplicando conservación de la energía en el punto de inicio y al final se tiene . Ek inicial =0, Ep final = 0; por lo que la energía potencial al inicio es igual a la energía cinética de traslación final mas la energía cinética de rotación



$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Como

$v_{cm} = R\,\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando v_{cm} se obtiene:

$$v_{cm}=\sqrt{\frac{2gh}{I+I_{cm}/MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme de momento de inercia $I_{cm}=\frac{2}{5}MR^2$, se puede calcular su v_{cm} en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2=\frac{2gh}{1+\frac{(2/5)MR^2}{MR^2}}=\frac{2gh}{1+\frac{2}{5}}=\frac{10}{7}gh$$

$$\Rightarrow\ v_{cm}=\sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

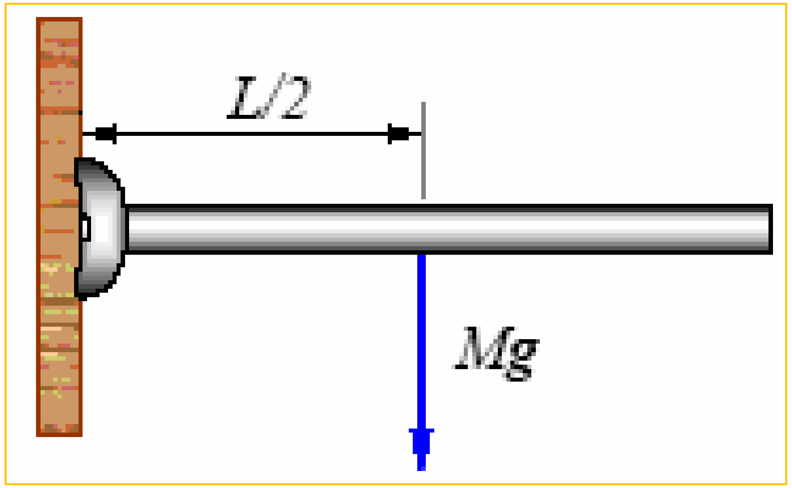
La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

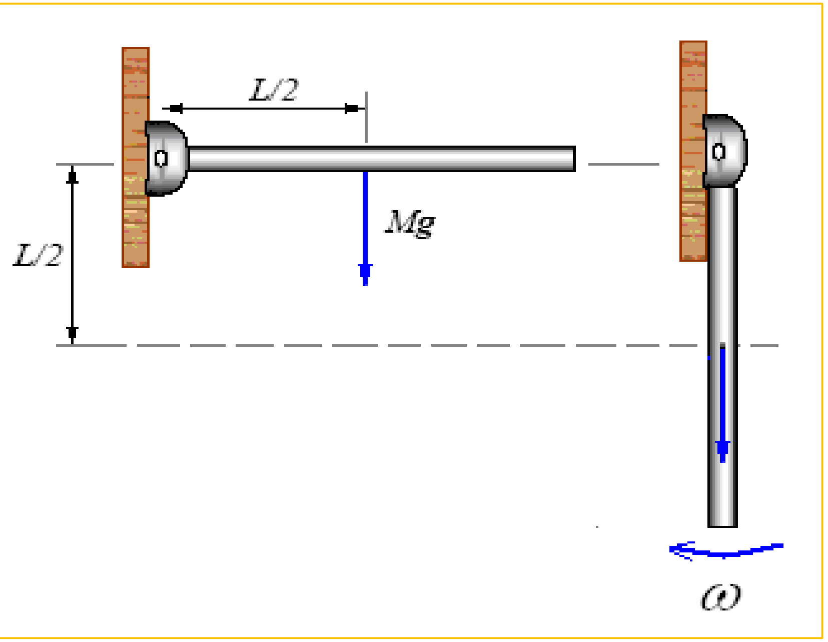
$$v_{cm}^2=v_{cmi}^2+2a_{cm}x\ \Rightarrow\ a_{cm}=\frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene: $h = x$ sen θ, donde x es la longitud del plano, reemplazando en a_{cm}:

$$a_{cm}=\frac{\frac{5}{7}gx\mathrm{sen}\,\theta}{2x}=\frac{5}{7}g\mathrm{sen}\,\theta$$

Ejemplo 2. Para la barra giratoria, calcular su rapidez angular y la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.





Solución

Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene *Ki* y cuando esta vertical tiene solo *Kf*, entonces:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

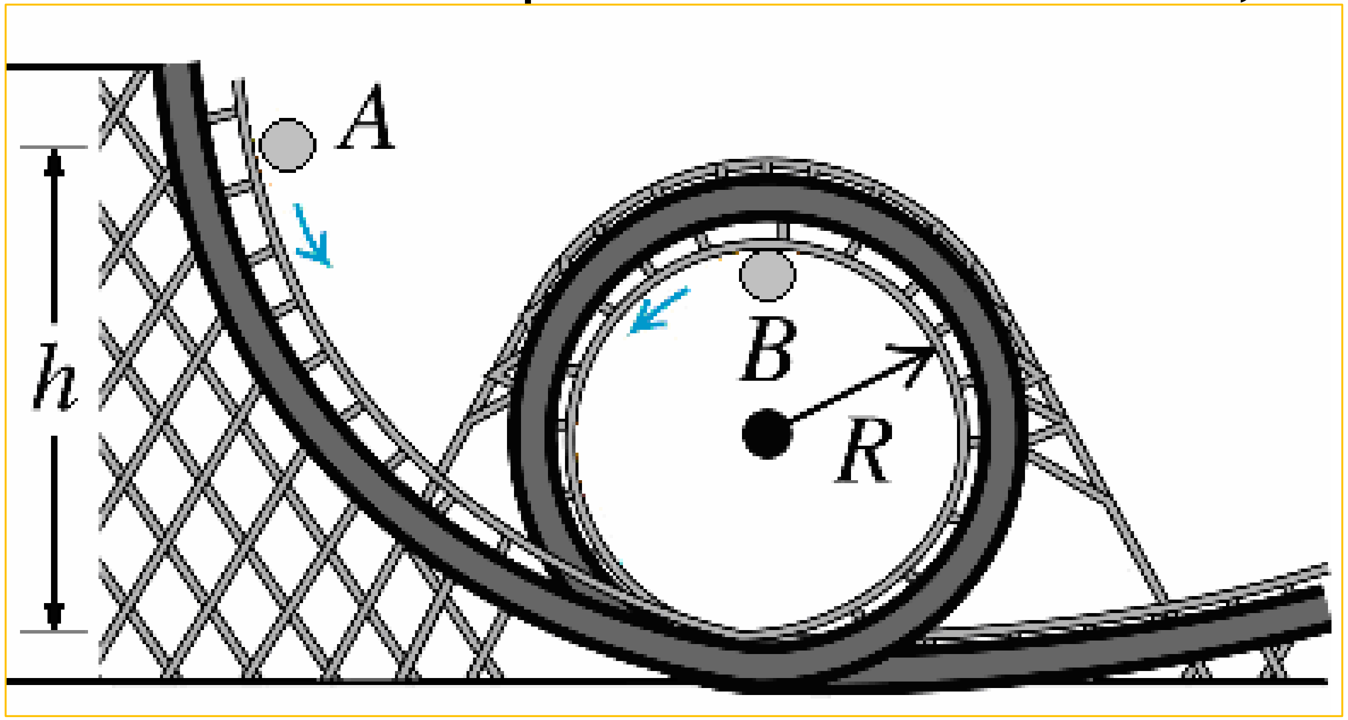
En el punto mas bajo la rapidez es

$$v = 2v_{cm} = \sqrt{3gL}$$

Ejemplo 3. Una canica sólida uniforme de radio r parte del reposo con su centro de masa a una altura h sobre el punto más bajo de una pista con un rizo de radio R. La canica rueda sin resbalar. La fricción de rodamiento y la resistencia del aire son despreciables.

a) ¿Qué valor mínimo debe tener h para que la canica no se salga de la pista en la parte superior del rizo? (Nota: r no es despreciable en comparación con R.)

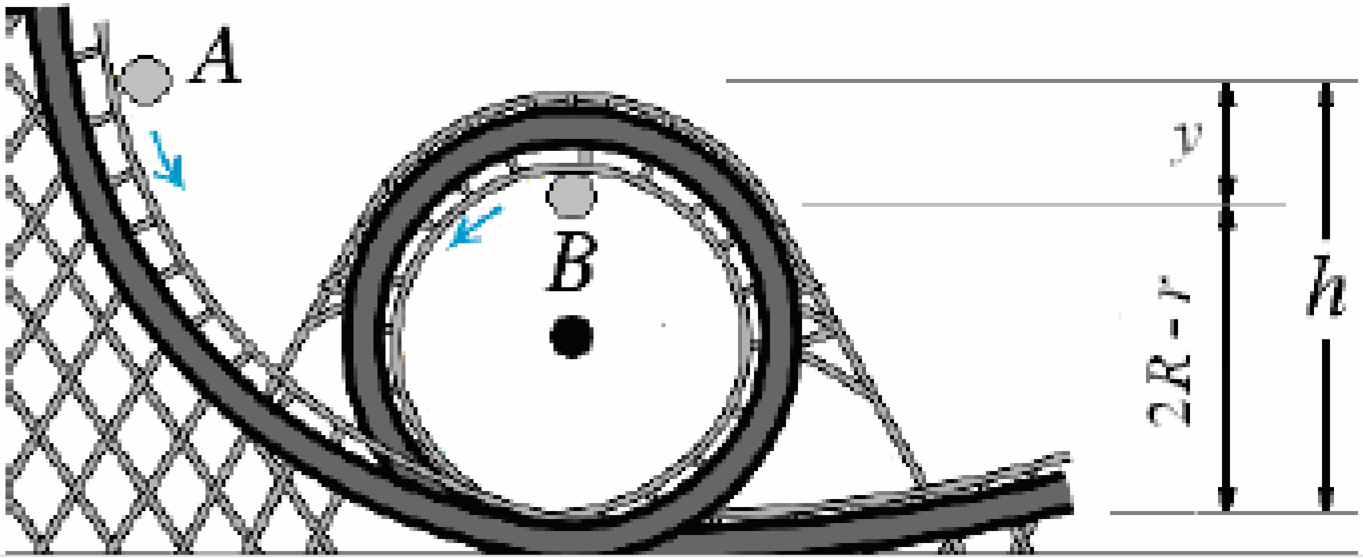
b) ¿Qué valor debe tener h si la pista está bien lubricada, haciendo despreciable la fricción?

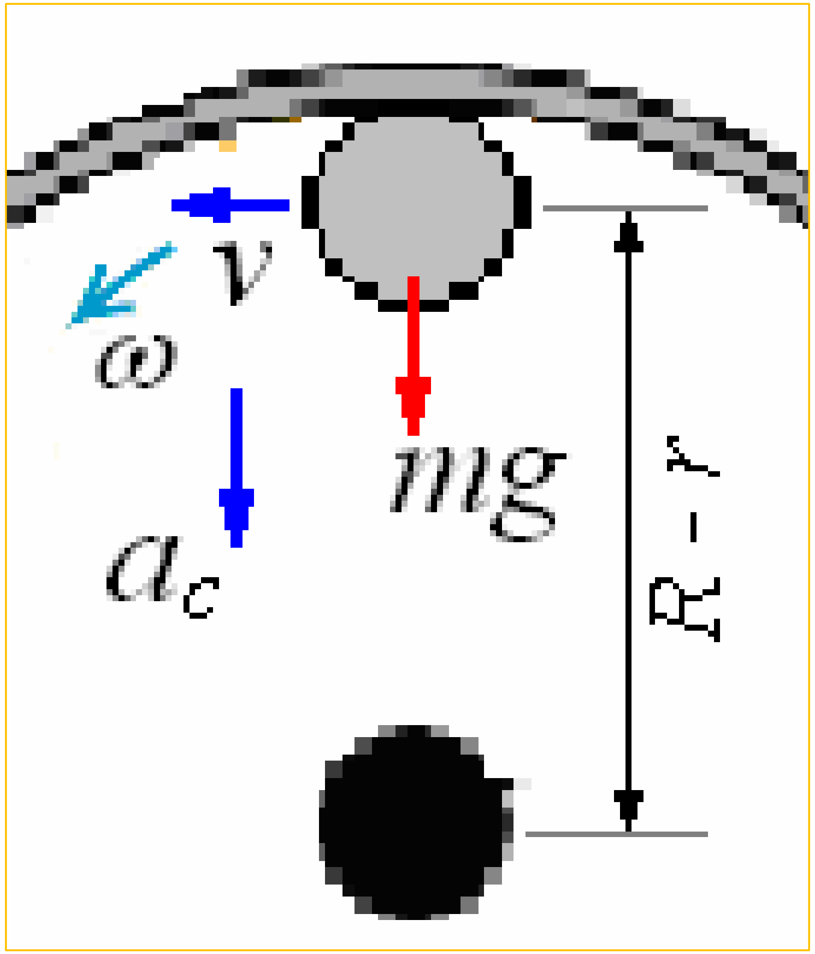


Solución

De A a B, la distancia que la canica ha caído es

$$y = h - (2R - r) = h + r - 2R.$$





El radio de la trayectoria del centro de masa de la canica es $R - r$

La condición para que la canica permanezca en la pista es

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -mg = -m\frac{v^2}{(R-r)} \Rightarrow$$

$$v^2 = g(R-r).$$

La velocidad se determina del teorema del trabajo energía,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Se tiene:

$$y = h - (2R - r)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Se sabe que para una esfera

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Reemplazando estos valores en la ecución de la energía:

$$mg(h - 2R + r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$g\left(h-2R+r\right)=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{5}v^2=\frac{7}{10}v^2$$

$$g\left(h-2R+r\right)=\frac{7}{10}v^2$$

Reemplazando el valor de v^2:

$$g\left(h-2R+r\right)=\frac{7}{10}g\left(R-r\right)\Rightarrow$$

$$h-2R+r=\frac{7}{10}(R-r);$$

$$h=2R-r+\frac{7}{10}(R-r)$$

$$=2R-r+\frac{7}{10}(R-r)$$

$$=\frac{27}{10}R-\frac{17}{10}r$$

$$=2{,}7R-1{,}7r$$

b) En ausencia de fricción no habrá rotación. Luego:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

Sustituyendo las expresiones para y y v^2 en términos de los otros parámetros da

$$h - 2R + r = \frac{1}{2}(R - r)$$

Resolviendo obtenemos

$$h = \frac{5}{2}R - \frac{3}{2}r.$$

TRASLACIONES Y ROTACIONES COMBINADAS

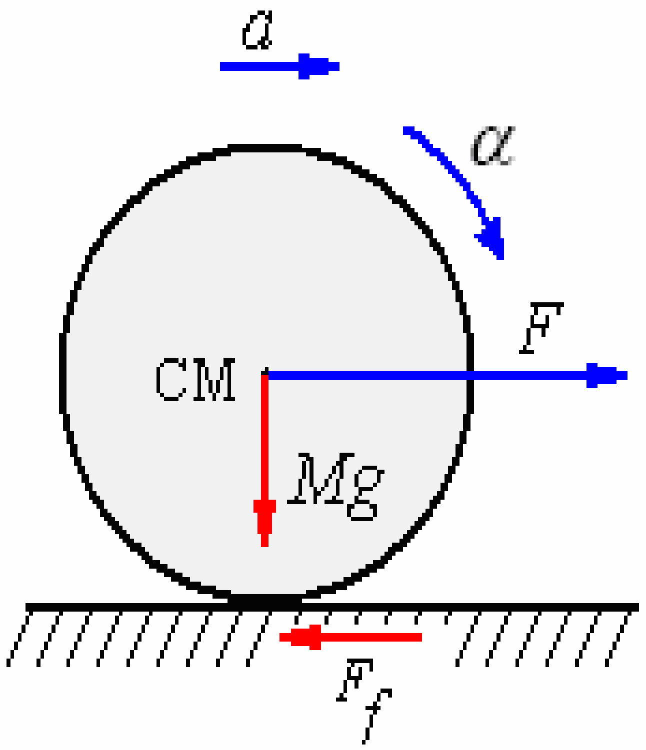
Hasta ahora solo hemos tomado en consideración la rotación del cuerpo en torno a un eje fijo en el espacio.

La finalidad de esta sección es estudiar el caso en que el eje de rotación si acelera también vamos a presentar dos métodos analíticos de resolver este caso.

Primer método

Aplicamos la segunda ley de Newton para traslación relativa ejes no rotantes a través del centro de masa. Para ilustrar este método y el otro también, consideremos un cuerpo de radio R, masa M y momento de inercia respecto a su entro masa I, al que se le obliga a rodar sin deslizamiento a lo largo de una superficie horizontal por medio de una

fuerza F que actúa en su centro de masa, La tuerza de fricción F_f y la reacción N actúan tal como se muestra en la figura siguiente.



EL cuerpo se mueve con una aceleración horizontal *a* que es la que corresponde a su centro de masa, y a su vez rota con aceleración angular α .
Como rueda sin deslizamiento la relación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular es $x = R\,\theta$.

La velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega$$

La aceleración es

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R\alpha$$

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación alrededor del centro de masa

$$-RF_f = -I_{CM}\alpha$$

Eliminando F_f y α, obtenemos:

$$\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)a = F$$

La aceleración

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Despejando F_f y remplazando se tiene

$F - I_{cm}\ \alpha\ /R = M\ a$

$F = Ma + I_{cm}\ a\ /R2$

Si para $t = 0$:

$x_0 = 0$, $v_0 = 0$,

Siendo a = constante

La velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = \frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t$$

El desplazamiento es:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t^2$$

Segundo método

Este método Consiste en usar las ecuaciones de la energía directamente.

Es un Sistema Conservativo

$K + U =$ Constante

Resolveremos por este método el ejemplo anterior. Puesto que no hay deslizamiento la tuerza de fricción sobre el cuerpo no trabaja sobre el mientras rueda. Siendo un sistema conservativo la fuerza F

se puede deducir de una función Potencial $U = -Fx$ donde x es la coordenada horizontal del centro de masa.

La energía E del cuerpo es:

$E = K + U$

La energía E del cuerpo es:

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 \text{, } U = -Fx$$

Luego: $E = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 - Fx$

Siendo $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} v^2 \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) - Fx$$

De aquí podemos evaluar la velocidad considerando que para el instante inicial $x = 0$, y $v = 0$, por consiguiente $E = 0$.

$$\frac{1}{2} v^2 \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) - Fx = 0 \text{ y}$$

$$\frac{1}{2} v^2 \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) = Fx$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}}$$

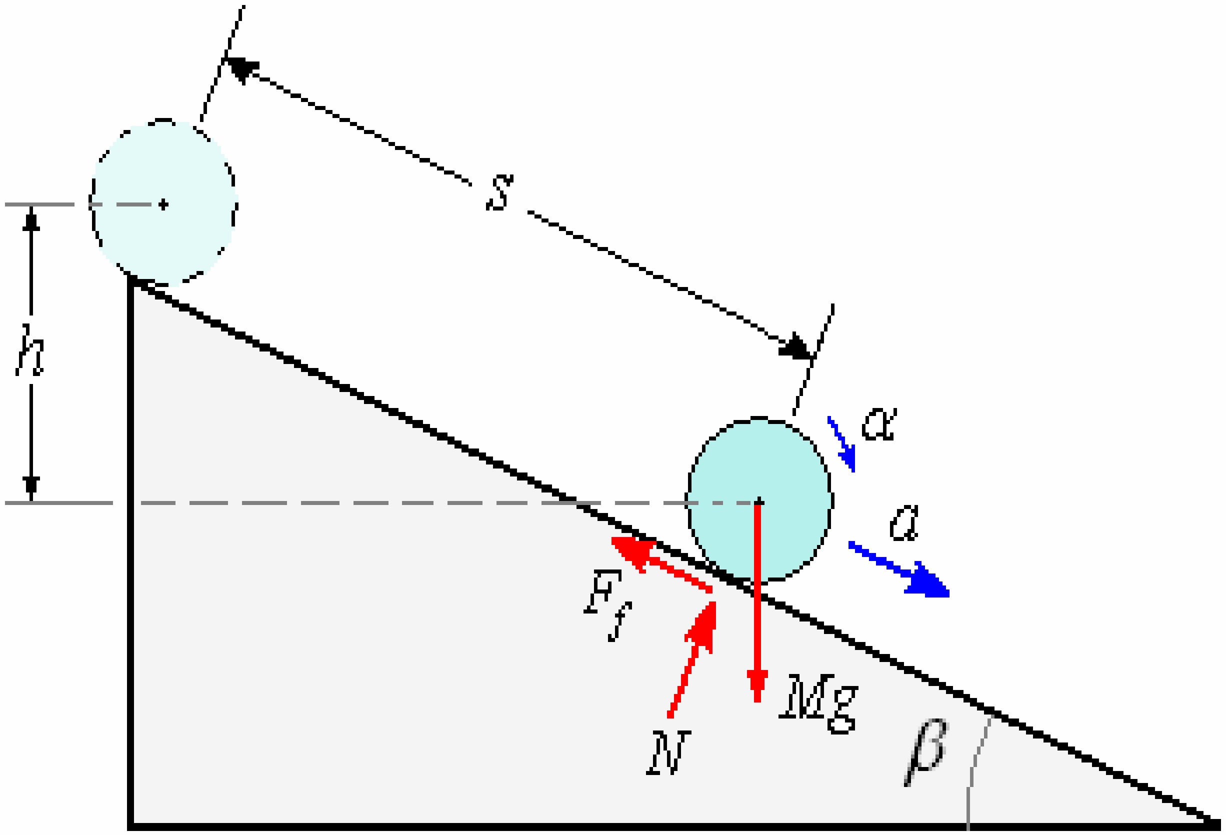
Siendo un movimiento con aceleración constante

$$v = \sqrt{2ax}$$

De esto

$$a = \frac{F}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}$$

Ejemplo 4. Analizar el movimiento de un cuerpo de radio R, momento de inercia respecto a su centro de masa I que rueda sin deslizar hacia abajo en plano inclinado de ángulo β .



Vamos a resolver por el primer método.

Traslación:

$$Mg\operatorname{sen}\beta - F_f = Ma$$

Rotación:

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

Por la condición de no deslizamiento:

$$\alpha = a/R$$

Eliminando α y F_f obtenemos:

$$a = \frac{Mg\operatorname{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}$$

Considerando que para $t = 0$: $s = 0$, y $v = 0$.

$$v = \left(\frac{Mg\operatorname{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t,$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{Mg\operatorname{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t^2$$

Para un anillo:

$$I_{CM} = MR^2,\ s = \frac{1}{4}g\operatorname{sen}\beta\, t^2$$

Para un disco:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\ s = \frac{1}{3}g\operatorname{sen}\beta\, t^2$$

Para una esfera:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2,\ s = \frac{5}{14}g\operatorname{sen}\beta\, t^2$$

Para un plano sin fricción (sin rodadura)

$$s = \frac{1}{2}g\operatorname{sen}\beta\, t^2$$

Por la ecuación de energía

Si para $t = 0$: $K_0 = 0$ y $U_0 = 0$

$$E = K_0 + U_0 = 0$$

Llamando h a la caída del centro de masa desde la posición de reposo, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2,$$

$$U = -Mgh = -Mgs\,\mathrm{sen}\beta = 0,$$

$$\omega = v/R$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) - Mgs\,\mathrm{sen}\beta$$

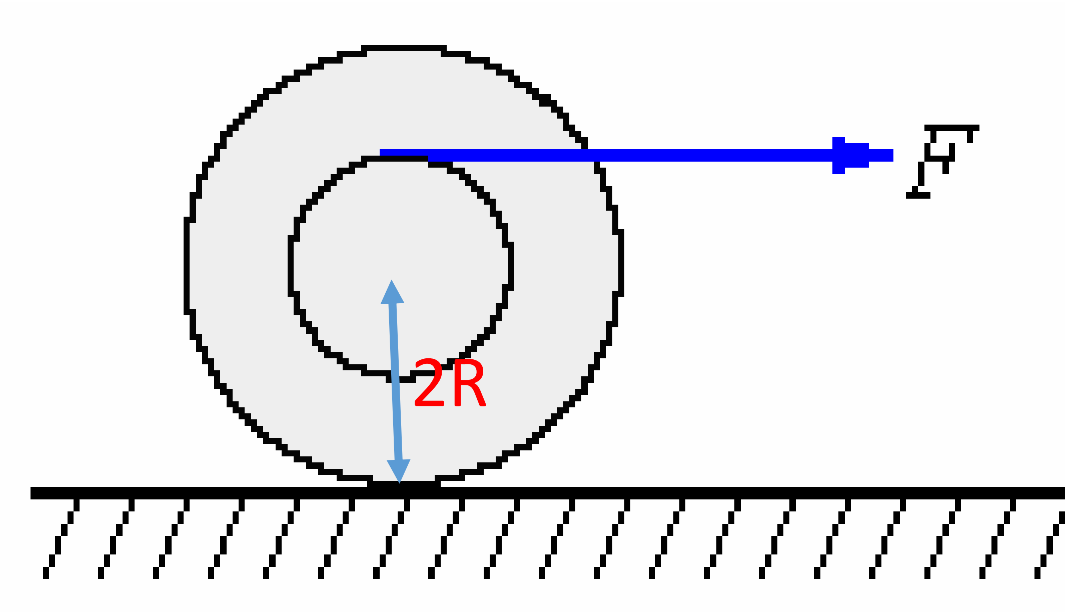
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg\mathrm{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}s}$$

Ejemplo 5. Un disco de masa M y radio $2R$ se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un resalto de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:

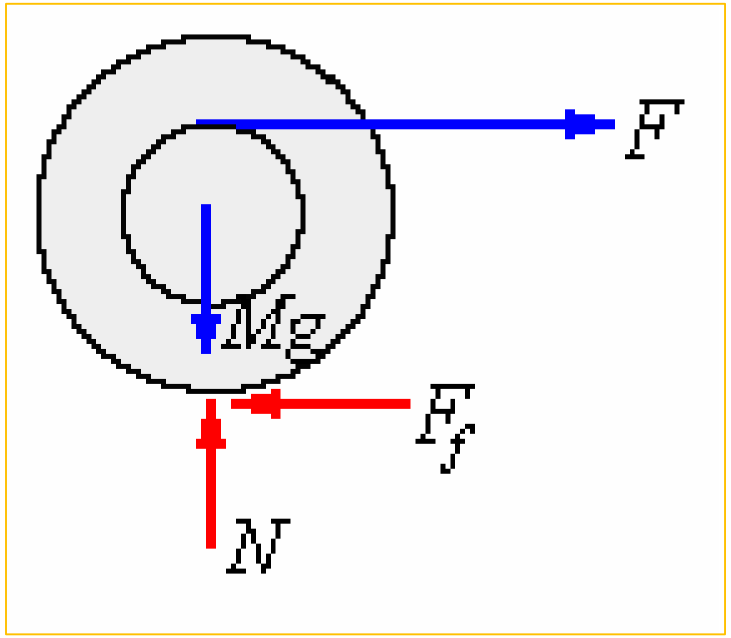
a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.



Solución.



Ahora $F - F_f = Ma$, $N - Mg = 0$

$$F_f 2R + FR = \frac{1}{2}M(2R)^2\alpha$$

$$= 2MR^2\left(\frac{a}{2R}\right) = MRa$$

Simplificando:

$$2F_f + F = Ma = F - F_f$$

$$\Rightarrow F_f = 0$$

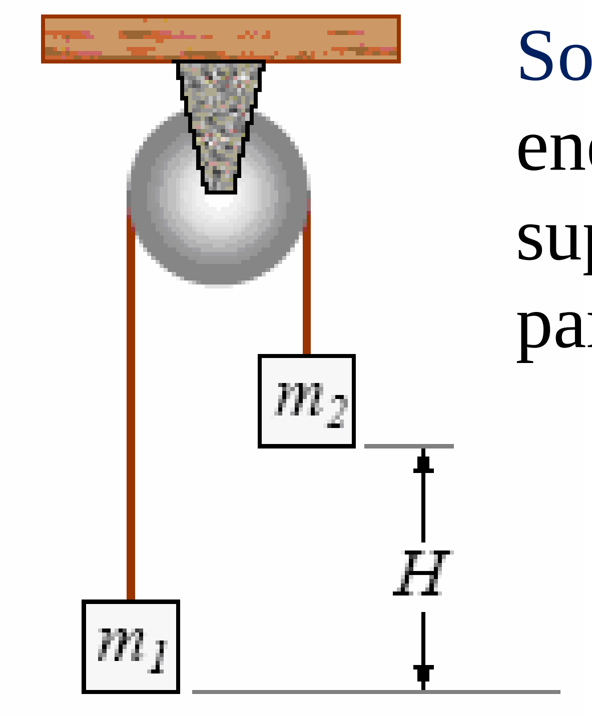
De donde resulta:

a) $a = \dfrac{F}{m}$

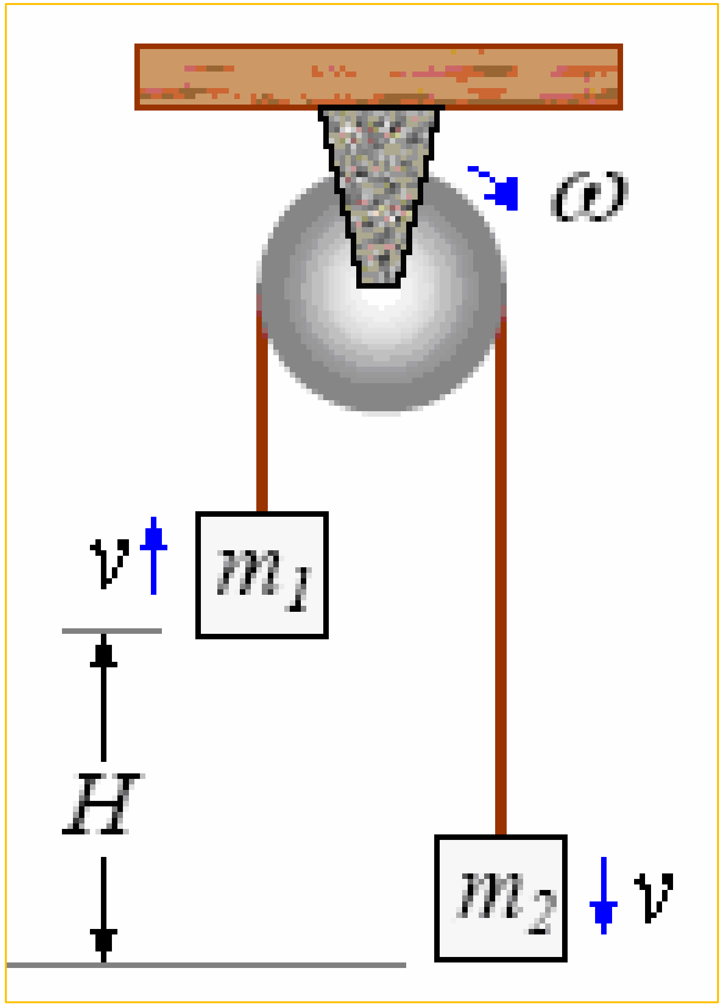
b) $\alpha = \dfrac{F}{2MR}$

c) $F_f = 0$

Ejemplo 7. Para el sistema de la figura, las masas tiene momento de inercia I en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo. Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido H y la rapidez angular de la polea.



Solución: Como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa $m1$ y $m2$, suponiendo que $m2$ se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:



$$\Rightarrow K_{1i} + K_{2i} + U_{1i} + U_{2i}$$

$$= K_{1f} + K_{2f} + K_p + U_{1f} + U_{2f}$$

$$\Rightarrow 0 + m_2 gH$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + m_1 gH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) v^2 = (m_2 - m_1) gH$$

Donde se ha usado la relación $v = R\,\omega$, despejando v se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}}$$