FUNCIONES DE BESSEL

1. LA ECUACIÓN DE BESSEL Y SUS SOLUCIONES.

Considérese la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

donde ν es un parámetro. Dicha ecuación se conoce como *ecuación de Bessel* y juega un papel importante en Matemática Aplicada.

Se demuestra que una solución de la ec. (1) es la llamada *función de Bessel de primera clase* de orden ν, la cual se define por

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)} \qquad , \qquad |\, x \,| < \infty \tag{2}$$

Cambiando ν por -ν, se observa que

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-\nu+2k}}{k!\ \Gamma(-\nu+k+1)} \tag{3}$$

es también solución de la ec. (1).

Si $\nu \neq n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, la función $J_{-\nu}(x)$ no está acotada cuando $x \to 0$ mientras que $J_\nu(x)$ tiende a cero en las mismas circunstancias; por lo tanto, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes y la solución general de la ec. (1) puede escribirse como

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{4}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Cuando $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, se tiene que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{5}$$

En efecto:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}$$

Puesto que $\Gamma(z)$ es infinita para z entero negativo, los términos de la suma con $k < n$ se anulan y

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}$$

Haciendo $k - n = s$, queda que

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}(x/2)^{n+2s}}{(n+s)!\ \Gamma(s+1)} = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (x/2)^{n+2s}}{s!\ \Gamma(n+s+1)} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

Se ha visto que cuando $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente dependientes y, en consecuencia, en este caso, la solución general de la ec. (1) no es de la forma (4). Surge así la necesidad de buscar otra solución de la ec. (1) que sea linealmente independiente con $J_\nu(x)$ para cualquier valor de ν. A tal efecto, considérese la función $Y_\nu(x)$, definida por

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi} \tag{6}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Si $\nu \neq n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, la función $Y_\nu(x)$ es solución de la ec. (1) puesto que no es más que una combinación lineal de las dos soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$. Además, en este caso, la independencia lineal de $Y_\nu(x)$ y $J_\nu(x)$ surge como consecuencia inmediata de que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes.

Usando las series de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, y aplicando la regla de L'Hospital, resulta que

$$\begin{aligned} Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x/2)^{2k+n}}{k!\ (k+n)!} (H_k + H_{k+n}) - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!\ (x/2)^{2k-n}}{k!} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{7}$$

donde $x > 0$, $H_0 = 1$, $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ y γ es la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{m \to \infty} (H_m - \ln m) \simeq 0.57722157$$

Cuando $n = 0$, la última suma en (7) debe reemplazarse por cero. La presencia del término logarítmico indica que $Y_n(x)$ es linealmente independiente con $J_n(x)$.

La función $Y_\nu(x)$ es denominada *función de Bessel de segunda clase* de orden ν.

Luego, la solución general de la ecuación de Bessel, para todo valor de ν, puede escribirse como

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2\, Y_\nu(x) \tag{8}$$

En algunas aplicaciones la solución general de la ecuación de Bessel se expresa en la forma

$$y = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x) \tag{9}$$

donde $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$ son llamadas *funciones de Bessel de tercera clase* ó *funciones de Hankel* de orden ν, definidas por

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \qquad , \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \tag{10}$$

Una generalización de la ecuación de Bessel, incluye un parámetro λ en la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{11}$$

Haciendo el cambio $z = \lambda x$ en (11), se deduce que la solución general de esta ecuación viene dada por

$$y = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2\, Y_\nu(\lambda x) \tag{12}$$

2. FUNCIÓN GENERADORA DE $J_n(x)$.

Se tiene que

$$w(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{13}$$

En efecto:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)t^n$$

Multiplicando las series

$$e^{\frac{xt}{2}} = 1 + \frac{(x/2)}{1!}t + \frac{(x/2)^2}{2!}t^2 + \cdots$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = 1 - \frac{(x/2)}{1!}\frac{1}{t} + \frac{(x/2)^2}{2!}\frac{1}{t^2} - + \cdots$$

e igualando los coeficientes de los términos con idénticas potencias de t, se obtiene que

$$a_n(x) = \begin{cases} J_n(x) & , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ (-1)^n J_{-n}(x) & , \quad n = -1, -2, \cdots \end{cases}$$

Luego,

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n J_{-n}(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Según (5), se tiene que $(-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x)$, resultando así (13).

3. FÓRMULAS DE RECURRENCIA.

Se tiene que

$$x^\nu J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k}\,k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2\nu+2k)x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}\, k!\, \Gamma(\nu+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(\nu+k)x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}\, k!\, (\nu+k)\Gamma(\nu+k)} \\
&= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{(\nu-1)+2k}}{k!\, \Gamma\left[(\nu-1)+k+1\right]}
\end{aligned}
$$

lo cual significa que

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{14}$$

Análogamente, se demuestra que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{15}$$

Derivando el lado izquierdo de (14) como un producto, se tiene

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J_\nu'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

de donde, al multiplicar por $x^{-\nu}$, resulta

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) \tag{16}$$

De la misma manera, desarrollando la derivada en (15) y multiplicando luego por x^ν, se obtiene

$$-\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x) = -J_{\nu+1}(x) \tag{17}$$

Sumando y restando las fórmulas (16) y (17), resultan

$$2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \tag{18}$$

y

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \tag{19}$$

respectivamente.

Obsérvese que, utilizando repetidamente (19), cualquier función de Bessel $J_n(x)(n = 2, 3, \cdots)$ puede expresarse en términos de $J_o(x)$ y $J_1(x)$.

Las fórmulas (14) y (15) también resultan útiles escritas en la forma

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C \tag{20}$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + C \tag{21}$$

Tomando $\nu = 0$ en las fórmulas (15) y (21), se obtiene el caso particular

$$J_o'(x) = -J_1(x) \qquad ; \qquad \int J_1(x)dx = -J_o(x) + C$$

el cual es utilizado frecuentemente.

Las funciones $Y_{\nu}(x), H_{\nu}^{(1)}(x)$ y $H_{\nu}^{(2)}(x)$ satisfacen las mismas fórmulas de recurrencia.

Ejemplo 1. Hallar $\frac{d}{dx}\left[x^2 J_3(2x)\right]$ en términos de funciones de Bessel.

Solución.

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 J_3(2x)\right] = 2xJ_3(2x) + x^2 \cdot 2J_3'(2x)$$

Nótese que al derivar la función de Bessel se multiplica por la derivada del argumento.

Usando (16) con $\nu = 3$ y $2x$ en lugar de x. queda

$$\frac{3}{2x}J_3(2x) + J_3'(2x) = J_2(2x) \Rightarrow J_3'(2x) = J_2(2x) - \frac{3}{2x}J_3(2x)$$

Sustituyendo $J_3'(2x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[x^2 J_3(2x)\right] &= 2xJ_3(2x) + 2x^2\left[J_2(2x) - \frac{3}{2x}J_3(2x)\right] \\ &= 2x^2 J_2(2x) - xJ_3(2x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Demostrar que

$$J_2'(x) = (1 - 4x^{-2})J_1(x) + 2x^{-1}J_0(x)$$

Solución.
Usando (16) con $\nu = 2$, se tiene

$$\frac{2}{x}J_2(x) + J_2'(x) = J_1(x) \Rightarrow J_2'(x) = J_1(x) - \frac{2}{x}J_2(x)$$

Tomando $\nu = 1$ en (19), queda

$$\frac{2}{x}J_1(x) = J_0(x) + J_2(x) \Rightarrow J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$$

Luego,

$$J_2'(x) = J_1(x) - \frac{2}{x}\left[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\right] \Rightarrow J_2'(x) = \left(1 - 4x^{-2}\right)J_1(x) - 2x^{-1}J_0(x)$$

Ejemplo 3. Hallar $I = \int x^4 J_1(x)dx$ en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.
Solución.

$$I = \int x^2 \cdot x^2 J_1(x)dx. \quad \text{Integrando por partes:}$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = x^2 J_1(x) \Rightarrow v = \int x^2 J_1(x)dx = x^2 J_2(x) \qquad \text{(según(20))}$$

$$I = uv - \int vdu = x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)dx$$

Usando de nuevo (20), se obtiene

$$I = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C$$

Aplicando (19), resulta finalmente

$$I = \int x^4 J_1(x)dx = \left(8x^2 - x^4\right)J_0(x) + \left(4x^3 - 16x\right)J_1(x) + C$$

4. FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS.

La ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{22}$$

se conoce como *ecuación de Bessel modificada*. Dicha ecuación puede escribirse en la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(i^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

correspondiendo así a una ecuación de Bessel del tipo (11), con parámetro $\lambda = i$ y, en consecuencia, una solución de la ec. (22) es la función de Bessel de argumento imaginario $J_\nu(ix)$.

Se observa que

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix/2)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}$$

$$i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}$$

Puesto que $J_\nu(ix)$ es solución de (22), también lo es $i^{-\nu}J_\nu(ix)$. Así, se define la solución de argumento real

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)} \quad , \quad |\, x \,| < \infty \tag{23}$$

denominada *función de Bessel modificada de primera clase* de orden ν.

La función $I_{-\nu}(x)$ es otra solución de la ec. (22). Si $\nu \neq n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ las funciones $I_\nu(x)$ y $I_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes y la solución general de la ec. (22) puede escribirse como

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x) \tag{24}$$

Cuando $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ se tiene que

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \tag{25}$$

por lo que, en este caso, la solución general de (22) no es de la forma (24).

Se define la *función de Bessel modificada de segunda clase* de orden ν por

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\mathrm{sen}\nu\pi} \tag{26}$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Para todo valor de ν, la solución general de la ecuación de Bessel modificada, puede escribirse como

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x) \tag{27}$$

Las funciones $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ satisfacen las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu I_\nu(x)\right] = x^\nu I_{\nu-1}(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) \quad ; \quad \frac{\nu}{x} I_\nu(x) - I'_\nu(x) = -I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) \quad ; \quad 2I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu K_\nu(x)\right] = -x^\nu K_{\nu-1}(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} K_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{\nu}{x} K_\nu(x) + K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) \quad ; \quad \frac{\nu}{x} K_\nu(x) - K'_\nu(x) = K_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) = K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x) \quad ; \quad -2K'_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)$$

5. FUNCIONES DE BESSEL DE ORDEN $\pm 1/2$.

Se tiene que

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ (x/2)^{\frac{1}{2}+2k}}{k! \ \Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ x^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{\frac{1}{2}+2k} k! \ \Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}$$

Aplicando la fórmula de duplicación de la función Gamma

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

con $z = k+1$, se tiene que

$$2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2k+2) \Rightarrow 2^{2k+1}k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}(2k+1)!$$

Luego

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1}k! \ \Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x \tag{28}$$

Análogamente, se demuestra que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{29}$$

Para las otras funciones de Bessel se tienen las siguientes expresiones:

$$Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \quad ; \quad Y_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$$

$$H^{(1)}_{1/2}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix} \quad ; \quad H^{(1)}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}$$

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{senh} x \quad ; \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$$

$$K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

Usando la fórmula de recurrencia (19) se pueden obtener expresiones de las funciones de Bessel para $\nu = \pm 3/2, \pm 5/2, \cdots$ Por ejemplo, tomando $\nu = 1/2$ en dicha fórmula, se tiene

$$\frac{1}{x} J_{1/2}(x) = J_{-1/2}(x) + J_{3/2}(x) \Rightarrow J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

de donde resulta

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\text{sen}x}{x} - \cos x \right)$$

6. REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE $J_\nu(x)$.

Usando la función Beta

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du \quad , \quad a, b > 0$$

se tiene que

$$\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+k+1)} = \int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du \quad , \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

Haciendo $u = t^2$ en la integral, queda

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+k+1)} &= \int_0^1 t^{2k-1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} 2t dt \\ &= 2\int_0^1 t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} = \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \quad , \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

Así,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (xt)^{2k}}{2^{2k}\,k!\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right] dt$$

Aplicando la fórmula de duplicación de la función Gamma, se tiene

$$2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)k! = \sqrt{\pi}(2k)!$$

y, entonces

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (xt)^{2k}}{(2k)!}\right] dt$$

esto es,

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xt\, dt \quad , \quad \nu > -\frac{1}{2} \qquad (30)$$

Haciendo $t = \cos\theta$ en (30), se obtiene

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{\pi} \cos(x\cos\theta)\, \mathrm{sen}^{2\nu}\theta\, d\theta \;,\; \nu > -\frac{1}{2} \qquad (31)$$

También pueden obtenerse representaciones integrales para las demás funciones de Bessel.

7. COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES DE BESSEL DE ORDEN Y ARGUMENTO NO NEGATIVOS.

Funciones de Bessel de primera clase.

Para $x \geq 0$ y $\nu \geq 0$, la función $J_\nu(x)$ es acotada y muestra un carácter oscilatorio.

$$J_\nu(x) \simeq \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \quad x \to 0$$

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad x \to \infty$$

Luego:

$$J_\nu(0) = 0 \quad , \quad \nu > 0 \quad ; \quad J_0(0) = 1 \quad ; \quad J_\nu(\infty) = 0$$

Funciones de Bessel de segunda clase.

Para $x > 0$ y $\nu \geq 0$ la función $Y_\nu(x)$ es de carácter oscilatorio, acotada en infinito.

$$Y_\nu(x) \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi\, x^\nu} \quad , \quad Y_0(x) \simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x} \quad , \quad x \to 0$$

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad x \to \infty$$

Luego:

$$Y_\nu(0) = -\infty \quad ; \quad Y_\nu(\infty) = 0$$

Función de Bessel modificada de primera clase.

Para $x > 0$ y $\nu \geq 0$ la función $I_\nu(x)$ es positiva y crece monótonamente cuando $x \to \infty$.

$$I_\nu(x) \simeq \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad , \quad x \to 0$$

$$I_\nu(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad , \quad x \to \infty$$

Luego:

$$I_\nu(0) = 0 \quad , \quad \nu > 0 \quad ; \quad I_0(0) = 1 \quad ; \quad I_\nu(\infty) = \infty$$

Función de Bessel modificada de segunda clase.

Para $x > 0$ y $\nu \geq 0$ la función $K_\nu(x)$ es positiva y decrece monótonamente cuando $x \to \infty$.

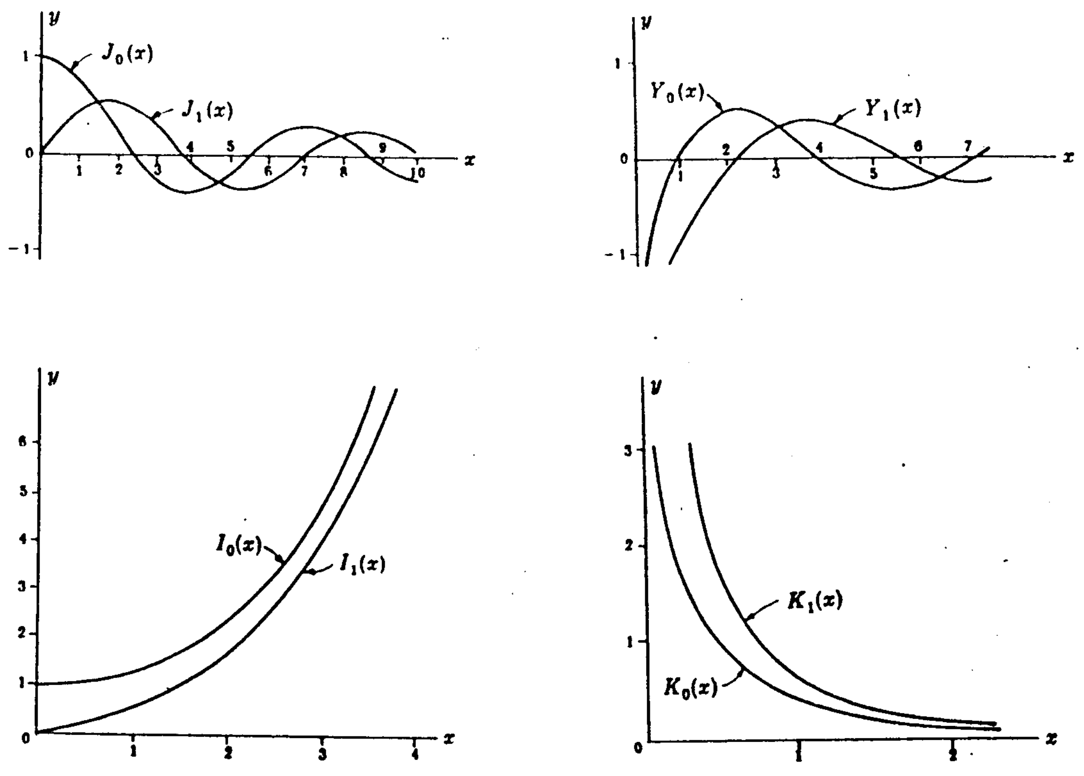
$$K_\nu(x) \simeq \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{x^\nu} \quad , \quad K_0(x) \simeq \ln\frac{2}{x} \quad , \quad x \to 0$$

$$K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad , \quad x \to \infty$$

Luego:

$$K_\nu(0) = \infty \quad ; \quad K_\nu(\infty) = 0$$

Gráficas.



8. ORTOGONALIDAD.

Sean λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ las raíces positivas de la ecuación

$$J_\nu(\lambda a) = 0 \tag{32}$$

Es conocido que la ecuación diferencial

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(\lambda_i^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0$$

tiene como solución particular

$$u = J_\nu(\lambda_i x)$$

De igual forma

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(\lambda_j^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) v = 0$$

tiene la solución

$$v = J_\nu(\lambda_j x)$$

Multiplicando la ecuación en u por xv, la ecuación en v por xu, restando luego e integrando la ecuación resultante entre 0 y a, se obtiene

$$\left(\lambda_i^2 - \lambda_j^2\right) \int_0^a xuv dx = [x(uv' - vu')]_0^a$$

$$\left(\lambda_i^2 - \lambda_j^2\right) \int_0^a xJ_\nu(\lambda_i x)J_\nu(\lambda_j x)dx = a\left[\lambda_j J_\nu(\lambda_i a)J'_\nu(\lambda_j a) - \lambda_i J_\nu(\lambda_j a)J'_\nu(\lambda_i a)\right]$$

Si λ_i y λ_j son dos raíces distintas de la ec. (32), resulta que

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_i x)J_\nu(\lambda_j x)dx = 0 \quad , \quad i \neq j \tag{33}$$

lo cual significa que el conjunto $J_\nu(\lambda_i x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ es ortogonal en el intervalo $(0, a)$ con función peso x.

Para $i = j$, se tiene que

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\lambda_i x)dx = \lim_{\lambda_j \to \lambda_i} \frac{a\left[\lambda_j J_\nu(\lambda_i a)J'_\nu(\lambda_j a) - \lambda_i J_\nu(\lambda_j a)J'_\nu(\lambda_i a)\right]}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}$$

Usando la regla de L'Hospital, queda que

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\lambda_i x)dx = \frac{a^2}{2}\left[J_\nu'(\lambda_i a)\right]^2$$

Aplicando la fórmula de recurrencia (17) y la eco (32), resulta

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\lambda_i x)dx = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\lambda_i a) \quad (i = 1, 2, \cdots) \tag{34}$$

Se demuestra que la propiedad de ortogonalidad (33) también se satisface cuando λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ son las raíces positivas de la ecuación

$$h\ J_\nu(\lambda a) + \lambda\ J_\nu'(\lambda a) = 0 \quad (h \geq 0) \tag{35}$$

En este último caso, se tiene que

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\lambda_i x)dx = \frac{a^2}{2\lambda_i^2}\left(\lambda_i^2 + h^2 - \frac{\nu^2}{a^2}\right)J_\nu^2(\lambda_i a) \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{36}$$

En el caso particular de que $h = \nu = 0$ en (35), se tiene que la primera raíz es $\lambda_1 = 0$ y para dicha raíz la ec. (36) se reduce a

$$\int_0^a xdx = \frac{a^2}{2}$$

9. SERIES DE FOURIER-BESSEL.

Supóngase que *f(x)* tiene un desarrollo convergente de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_\nu(\lambda_i x) \quad , \quad 0 < x < a \tag{37}$$

donde λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ son las raíces positivas de la ec. (32) ó de la ec. (35).

Multiplicando ambos miembros de (37) por $xJ_\nu(\lambda_j x)$ (j fijo) e integrando entre 0 y a (suponiendo que la serie es integrable término a término), queda que

$$\int_0^a xf(x)J_\nu(\lambda_j x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^a xJ_\nu(\lambda_i x)J_\nu(\lambda_j x)dx$$

Aplicando la ortogonalidad (33), se obtiene

$$C_i = \frac{\int_0^a xf(x)J_\nu(\lambda_i x)dx}{\int_0^a xJ_\nu^2(\lambda_i x)dx} \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{38}$$

Teorema. Si f y f' son seccionalmente contínuas en $(0, a)$, entonces la serie de Fourier-Bessel (37) con coeficientes (38) converge a $f(x)$ en todo punto x donde f es contìnua. Si x es un punto de discontinuidad, la serie converge al valor $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

10. DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN CILINDROS.

Ejemplo 1.

Considérese un largo cilindro macizo de radio $r = a$ cuya superficie lateral se matiene a temperatura cero. Inicialmente, la temperatura en el cilindro está dada por $f(r)$. Suponiendo que no hay variación con z y que la tempe ratura para cada radio r es la misma en toda esa superficie (independiente de θ), se desea hallar una fórmula para la distribución de temperaturas $u(r, t)$ en el cilindro.

El modelo matemático del problema está constituido por la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (0 < r < a, t > 0) \tag{39}$$

junto con las condiciones

$$u(a, t) = 0 \qquad ; \qquad u(r, 0) = f(r) \tag{40}$$

Además, se exige que la función $u(r, t)$ debe ser acotada en todo el volumen del cilindro.

Usando el clásico método del producto, supóngase que

$$u(r, t) = R(r)T(t) \tag{41}$$

Sustituyendo en la ec. (39), se tiene

$$R(r)T'(t) = k\left[R''(r)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)T(t)\right]$$

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

Adicionalmente, de la condición $u(a,t) = 0$, se deduce que

$$R(a)\ T(t) = 0 \Rightarrow R(a) = 0$$

De esta manera, se obtienen los dos problemas siguientes:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \qquad , \qquad R(a) = 0 \tag{42}$$

$$T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0 \tag{43}$$

La ec. (42) corresponde a una ecuación de Bessel con parámetro λ del tipo (11), en donde $\nu = 0$; por lo tanto, su solución general es de la forma

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

La función $R(r)$ debe estar acotada en $r = 0$, por lo que se deduce que $C_2 = 0$, ya que $Y_0(0) = -\infty$. Así, queda que

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r)$$

Ahora,

$$R(a) = 0 \Rightarrow C_1 J_0(\lambda a) = 0$$

Para obtener solución no trivial, se debe tomar $C_1 \neq 0$ y, entonces

$$J_0(\lambda a) = 0 \tag{44}$$

Si λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ son las raíces positivas de la ec. (44), se tiene que, aparte del factor constante, las funciones

$$R_i(r) = J_0(\lambda_i r) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

son soluciones de (42).

Para los valores de λ considerados, la ec. (43) tiene las soluciones particulares

$$T_i(t) = e^{-k\lambda_i^2 t} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

Así, la sucesión de funciones

$$u_i(r,t) = J_0(\lambda_i r)e^{-k\lambda_i^2 t} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

satisfacen la ec. (39) y las condiciones de contorno consideradas y, de acuerdo con el principio de superposición, la función

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\lambda_i r)e^{-k\lambda_i^2 t} \tag{45}$$

también las satisface.

Aplicando la condición $u(r,0) = f(r)$, se obtiene la serie de Fourier-Bessel

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\lambda_i r)$$

de donde

$$C_i = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a r f(r) J_0(\lambda_i r) dr \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el cilindro viene dada por

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^a r f(r) J_0(\lambda_i r) dr \right] \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_1^2(\lambda_i a)} \, e^{-k\lambda_i^2 t} \tag{46}$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ec. (44).

Se puede verificar, sin mayor dificultad, que si se reemplaza la condición de que la superficie lateral del cilindro se mantiene a temperatura cero por la condición de que a través de dicha superficie se transmite calor a un medio circundante que está a temperatura cero, esto es,

$$u_r(a,t) = -hu(a,t) \qquad (h \text{ constante}) \tag{47}$$

resulta que

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 + h^2)\, J_0^2(\lambda_i a)} \left[\int_0^a r f(r) J_0(\lambda_i r) dr \right] J_0(\lambda_i r) e^{-k\lambda_i^2 t} \tag{48}$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ecuación

$$hJ_0(\lambda a) + \lambda \ J_0'(\lambda a) = 0 \tag{49}$$

Cuando $h = 0$, se tiene

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2}\int_0^a rf(r)dr + \frac{2}{a^2}\sum_{i=2}^{\infty}\left[\int_0^a rf(r)J_0(\lambda_i r)dr\right]\frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0^2(\lambda_i a)}\, e^{-k\lambda_i^2 t} \quad (50)$$

donde $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_1(\lambda a) = 0 \quad (51)$$

La última solución corresponde al caso en que la superficie lateral del cilindro está aislada térmicamente, esto es,

$$u_r(a,t) = 0 \quad (52)$$

Ejemplo 2.

Un cilindro macizo está limitado por las superficies $r = a, z = 0$ y $z = b$.Se desea determinar la distribución de temperaturas estacionarias en el cilindro, si $u = 0$ en las dos primeras superficies y $u = f(r)$ en $z = b$.

En este caso, el problema de contorno a resolver es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad (0 < r < a, 0 < z < b) \quad (53)$$

$$u(a,z) = 0 \quad ; \quad u(r,0) = 0 \quad ; \quad u(r,b) = f(r) \quad (54)$$

Suponiendo

$$u(r,z) = R(r)G(z) \quad (55)$$

se tiene que

$$R''(r)G(z) + \frac{1}{r}R'(r)G(z) + R(r)G''(z) = 0$$

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = -\frac{G''(z)}{G(z)} = -\lambda^2$$

$$R(a)G(z) = 0 \Rightarrow R(a) = 0 \quad ; \quad R(r)G(0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$$

Luego:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \quad , \quad R(a) = 0 \tag{56}$$

$$G''(z) - \lambda^2 G(z) = 0 \quad , \quad G(0) = 0 \tag{57}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, de (56) resulta

$$R_i(r) = J_0(\lambda_i r) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

donde λ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\lambda a) = 0$$

Para el problema (57), se obtienen las soluciones particulares

$$G_i(z) = \text{senh}\lambda_i z \qquad (i = 1, 2, , \cdots)$$

De esta manera, la función

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\lambda_i r)\text{senh}\lambda_i z \tag{58}$$

es la solución del problema de contorno, supuesto que las C_i sean tales que se satisfaga la condición $u(r, b) = f(r)$, esto es,

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\lambda_i r)\text{senh}\lambda_i b$$

de donde se deduce que

$$C_i\text{senh}\lambda_i b = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a r f(r) J_0(\lambda_i r) dr \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

Así, resulta finalmente

$$u(r, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^a r f(r) J_0(\lambda_i r) dr \right] \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_1^2(\lambda_i a)} \frac{\text{senh}\lambda_i z}{\text{senh}\lambda_i b} \tag{59}$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de $J_0(\lambda a) = 0$.

EJERCICIOS

1. Hallar en términos de las funciones de Bessel J_0 y J_1 :

$$a)\ \frac{d}{dx}\left[x^3 J_4(x^2)\right] \qquad b)\int \frac{J_4(x)}{x^3}dx \qquad c)\int J_3(x)dx$$

2. Expresar $J_{5/2}(x)$ en términos de senos y cosenos.

3. Demostrar:

$$a)\ 4J''_\nu(x) = J_{\nu-2}(x) - 2J_\nu(x) + J_{\nu+2}(x)$$

$$b)\ 8J'''_\nu(x) = J_{\nu-3}(x) - 3J_{\nu-1}(x) + 3J_{\nu+1}(x) - J_{\nu+3}(x)$$

4. Haciendo $t = e^{i\theta}$ en la expresión de la función generadora de $J_n(x)$, deducir que

$$\cos(x\text{sen}\theta) = J_0(x) + 2\left[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \cdots\right]$$

$$\text{sen}(x\text{sen}\theta) = 2\left[J_1(x)\text{sen}\theta + J_3(x)\text{sen}3\theta + J_5(x)\text{sen}5\theta + \cdots\right]$$

De las fórmulas anteriores, obtener que

$$1 = J_0(x) + 2\left[J_2(x) + J_4(x) + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{2}\text{sen}x = J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - + \cdots$$

5. Deducir que

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x\text{sen}\theta)\cos\theta\text{sen}\theta d\theta = \frac{J_1(x)}{x}$$

6. Deducir una fórmula para la distribución estacionaria de temperaturas $u(r,z)$ en el cilindro macizo limitado por las superficies $r=1$, $z=0$ y $z=1$, si $u=0$ en la superficie r=1, $u=1$ en la superficie $z=1$ y la base $z=0$ está aislada.

$$\text{Sol.} \quad u(r,z) \;= 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_i r)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} \frac{\cosh \lambda_i z}{\cosh \lambda_i}, \quad [J_0(\lambda_i)=0]$$

7. Un cilindro macizo está limitado por las superficies $r=1$, $z=0$ y $z=b$. La primera superficie está aislada, la segunda se conserva a la temperatura cero, y la última a las temperaturas $f(r)$.

Deducir la fórmula de las temperaturas estacionarias $u(r,z)$ en el cilindro.

$$\text{Sol.} \quad u(r,z) = \frac{2z}{b}\int_0^1 rf(r)dr + 2\sum_{i=2}^{\infty}\left[\int_0^1 rf(r)J_o(\lambda_i r)dr\right]\frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0^2(\lambda_i)}\frac{\mathrm{senh}\lambda_i z}{\mathrm{senh}\lambda_i b}$$

donde $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ son las raíces positivas de $J_1(\lambda)=0$

8. Cuando $f(r)=A$ $(0<r<1)$ en el problema anterior, demostrar que $u(r,z)=\frac{Az}{b}$.

9. Determinar las temperaturas estacionarias acotadas $u(r,z)$ en el cilindro semi-infinito $(z \geq 0)$ de radio $r=1$, si $u=1$ en la base $z=0$ y en la superficie $r=1$ se transmite calor al medio ambiente a temperatura cero, de acuerdo con la ley $u_r(1,t)=-hu(1,t)$.

$$\text{Sol.} \quad u(r,z) = 2h\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2+h^2}\frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)}e^{-\lambda_i z} \quad , \quad [hJ_0(\lambda_i)=\lambda_i J_1(\lambda_i)]$$

BIBLIOGRAFÍA

1. **N.N. Lebedev:** SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS. Dover Publications, Inc.
2. **R.V. Churchil:** SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO. Mc Graw-Hill.
3. **C.R. Wylie:** MATEMÁTICAS SUPERIORES PARA INGENIERÍA. Mc Graw-Hill.