ECUACIONES EMPÍRICAS

1. OBJETIVOS

1.1 Determinar la ecuación empírica del periodo del péndulo simple
1.2 Desarrollar métodos gráficos y analíticos para tener información del experimento en estudio.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

La Física es una ciencia experimental por excelencia y como tal en el estudio de un fenómeno físico, no se puede dejar de realizar mediciones. Generalmente, en el Laboratorio, al empezar el estudio de un fenómeno físico, se obtiene un conjunto de valores correspondientes a dos variables, una dependiente de la otra. Esta dependencia entre variables se puede expresar matemáticamente mediante una ecuación que toma el nombre de ecuación empírica.

Variable. Es una cantidad a la cual se le puede asignar, durante un proceso de análisis, un número ilimitado de valores.

Constante. Es una cantidad que tiene un valor fijo durante un proceso de análisis. Se distinguen dos tipos de constantes: las absolutas y las arbitrarias; las absolutas tienen el mismo valor en todos los procesos (por ejemplo: π, e, 3), en tanto que las arbitrarias pueden tener un valor diferente en cada proceso particular. En Física se acostumbra llamar parámetros a éstas últimas.

Función. Cuando dos variables x e y están relacionadas de forma tal que para cada valor de x le corresponde uno de y, se dice que y es una función de x y se denota de la siguiente manera:

$$y = f(x)$$

donde: ***y*** es la ***variable dependiente*** o función, y ***x*** es la ***variable independiente***. Durante un experimento a la variable independiente se le dan valores predeterminados y el valor de la variable dependiente es observado y medido subsecuentemente.

Para deducir la correcta ecuación empírica es necesario obtener un buen gráfico de nuestros datos experimentales, por lo que debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Trazar en papel milimetrado dos ejes perpendiculares. En el eje horizontal se anotan los valores de la variable independiente (***x***) y en el eje vertical los valores de la variable dependiente (***y***).

2. Elegir escalas apropiadas en cada uno de los ejes, de acuerdo al rango de variación de los datos. En este aspecto es recomendable usar las escalas: 1:1; 1:2; 1:5. Es decir que, si el conjunto de valores de la variable ***x*** es: 1,4 kg; 2,8 kg; 3,6 kg; 4,0 kg; 5,8 kg debemos usar la escala 1:1. Esto significa que 1 kg del valor de la variable debe ser representado por 1 cm en el correspondiente eje sobre el milimetrado. En algunos casos es conveniente usar potencias de 10. Así por ejemplo, si los valores de alguna de las variables son: 0,003; 0,015; 0,018; 0,025, podremos escribir: 3×10^{-3}; 15×10^{-3}; 18×10^{-3}; 25×10^{-3}.

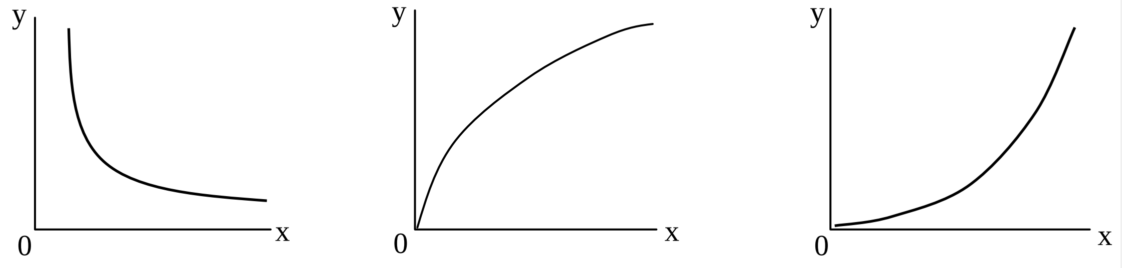
3. Tratar en lo posible que el gráfico ocupe la mayor parte del papel milimetrado y tenga un ubicación simétrica con respecto a los dos ejes. Se puede utilizar diferentes escalas en cada uno de los ejes.

4. Trazar una línea contínua y nítida que pase por entre los puntos, de forma tal que estos queden uniformemente distribuidos a ambos lados de la línea.

5. Comparar la línea obtenida con cada una de las curvas tipo que se muestran en las Figuras 1, 2 y 3 y por similitud asignar la ecuación empírica que le corresponde.

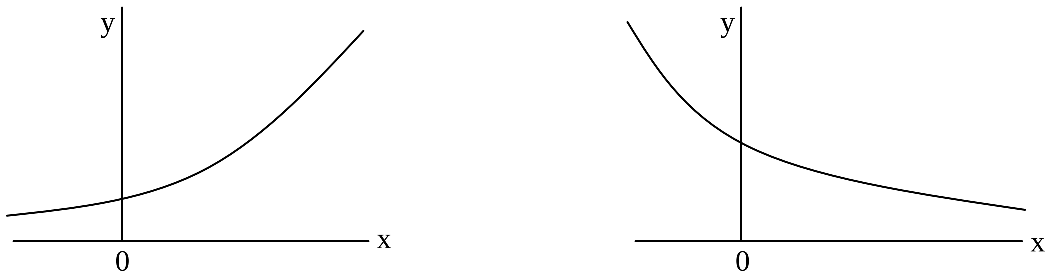
$y = Bx + A$ $y = Bx$

Figura 1. Relación Lineal



$y = k\,x^n$, *para* $n < 0$ $y = k\,x^n$, *para* $0 < n < 1$ $y = k\,x^n$, *para* $n > 1$

Figura 2. Relación Potencial



$y = k\,e^{a\,x}$, *para* $a > 0$ $y = k\,e^{a\,x}$, *para* $a < 0$

Figura 3. Relación Exponencial

De las gráficas anteriores la relación lineal es la más importante porque es la más usada para deducir la ecuación empírica de un fenómeno en estudio. Por lo tanto, en la ecuación de la recta

$$y = A + B\,x \tag{1}$$

debemos reconocer las siguientes constantes importantes :

Pendiente : **B**, es la tangente del ángulo de inclinación de la recta. Es decir que: **B = tan θ**.

Intercepto: **A**, es la distancia del origen al punto donde la recta corta al eje vertical (*y*). Cuando la recta pasa por el origen, **A = 0** y su ecuación es la relación proporcional:

$$y = \mathrm{B}\,x \tag{2}$$

Linealización de una Curva. La mayor información de un fenómeno se puede obtener, cuando los valores de sus variables pueden representarse mediante una línea recta . Por esta razón es conveniente convertir en una relación lineal la relación de variables de cualquier otra curva que obtengamos experimentalmente. Para ello se hace una transformación de variables en ambos miembros de la ecuación empírica obtenida. Este proceso se denomina **Linealización de la Curva.**

Ejemplo: Si el gráfico de los datos experimentales es una de las curvas de potencias que se muestran en la Figura 2, su ecuación empírica tendrá la forma

$$y = k\,x^n \tag{3}$$

donde ***k*** y ***n*** son constantes a determinar.

a) Esta ecuación puede ser linealizada tomando logaritmos a ambos miembros:

$$ln\ \mathrm{y} = ln\ \mathrm{k} + \mathrm{n}\ ln\ \mathrm{x} \tag{4}$$

y haciendo el siguiente cambio de codificación:

$$\mathrm{Y} = ln\ \mathrm{y};\ \mathrm{X} = ln\ \mathrm{x};\ \mathrm{A} = ln\ \mathrm{k}\ ;\ \mathrm{B} = \mathrm{n}.$$

la ecuación (3) se transforma en :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A} + \mathrm{B\,X} \tag{5}$$

que es la ecuación de una recta y consecuentemente el gráfico de las nuevas variables *Y* vs *X* debe ser una línea recta.

b) En el caso que se conociera el valor de la constante ***n*** de la ecuación (3) la forma de linealizar esta curva es haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{y}, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{k}$$

con lo cual la nueva ecuación es el de una recta del tipo:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{BX} \tag{6}$$

Determinación de las Constantes.

Método Gráfico. Este método consiste en determinar directamente la pendiente y el intercepto a partir de la gráfica. Para hallar la pendiente de la recta se eligen dos (2) puntos de ésta que no sean los puntos experimentales. Por ejemplo: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y entonces el valor de la **pendiente** se obtiene usando la fórmula:

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y}_1}{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1} = \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{X}} \tag{7}$$

El valor del intercepto se lee en el punto de corte de la recta graficada o su prolongacion con el eje de ordenadas.

Método Analítico o Estadístico. Este método consiste en aplicar el método de los ***cuadrados mínimos*** para calcular las constantes **A** y **B**. Este método tiene la ventaja de minimizar los errores experimentales en la determinación de **A** y **B**, para ello usamos las siguientes fórmulas:

$$A = \frac{(\sum X_j^{\,2})(\sum Y_j) - (\sum X_j)(\sum X_j Y_j)}{N(\sum X_j^{\,2}) - (\sum X_j)^2} \tag{8}$$

$$B = \frac{N(\sum X_j Y_j) - (\sum X_j)(\sum Y_j)}{N(\sum X_j^{\,2}) - (\sum X_j)^2} \tag{9}$$

La dispersion de los puntos en torno a la recta de regresión está caracterizada por las diferencias en la forma dada por:

$$\delta Y_j = Y_j - BX_j - A \tag{10}$$

La desviación estandar de estas diferencias es:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum(\delta Y_i)^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum(Y_i - BX_i - A)^2}{N-2}} \tag{11}$$

y las incertidumbres en la pendiente y el intercepto son respectivamente:

$$\Delta B = s_y\sqrt{\frac{N}{N\sum(X_j^{\,2}) - \left(\sum X_j\right)^2}}\,, \qquad \Delta A = s_y\sqrt{\frac{\sum X_j^{\,2}}{N\sum X_j^{\,2} - \left(\sum X_j\right)^2}} \tag{12}$$

Para el caso de la ecuación del periodo T del péndulo simple tenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13}$$

o bien

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\, L^{1/2} \tag{14}$$

Si en esta ecuación se reemplaza el coeficiente de L por la constante k y el exponente de L por la constante n, se tiene una expresión general, la cual se llama ecuación empírica del periodo del péndulo simple:

$$T = k\ L^n \tag{15}$$

Para linealizarla aplicamos logaritmos a ambos miembros de la ecuación (9) y tenemos:

$$\ln T = \ln k + n \ln L \tag{16}$$

y haciendo el cambio de variables: $\ln T = Y$; $\ln L = X$; $\ln k = A$; $n = B$ resulta la recta:

$$Y = A + B X \tag{17}$$

La ecuación (15) (ecuación empírica del periodo del péndulo simple) quedará determinada cuando se obtengan los valores de k y n, estos parámetros se encuentran por cuadrados mínimos o graficando la recta (17) y hallando el intercepto y la pendiente. Nótese que k = anti ln A

3. MATERIALES E INSTRUMENTOS ( )

Materiales		Instrumentos	Precisión

4. PROCEDIMIENTO Y DATOS EXPERIMENTALES ( )

4.1 Instalar el equipo como se muestra en la Figura (3)

4.2 Con una longitud pendular L = 20 cm hacer oscilar el péndulo con una amplitud angular menor a 15° y medir 5 veces el tiempo de 10 oscilaciones completas anotando los resultados en la Tabla 1, así como el valor promedio del periodo T calculado con la siguiente fórmula $T = \frac{1}{50}(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5)$.

4.3 Repetir el paso anterior para las siguientes longitudes de L: 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80; 90 y 100 cm. Anotar estos valores en la Tabla 1.

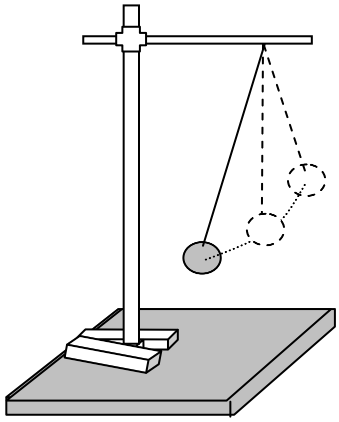


Figura. (3)

Tabla 1

N	L (cm)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)	T (s)
1	20						
2	25						
3	30						
4	40						
5	50						
6	60						
7	70						
8	80						
9	90						
10	100						

5. PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS ( )

Método gráfico

5.1 Con los datos de la Tabla 1 calcule los logaritmos naturales de L y de T y complete la Tabla 2.

Tabla 2

N	**L (cm)**	**T (s)**	**Ln L**	**Ln T**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

5.2 Con los datos de la Tabla 2 construya, en papel milimetrado, la gráfica T vs L. Observe que esta gráfica es similar a una de las curvas típicas de la Figura (2), por lo tanto, la dependencia entre T y L tiene la forma de la ecuación (3). Escriba esta ecuación en términos de T y L.

.....……......…………………………………………………………………………….. ………

5.3 **Linealización de la curva**. Usando los otros datos de la Tabla 2, construya en papel milimetrado la gráfica ln T vs ln L. Determine en la misma gráfica la pendiente B, el intercepto A y anote aquí los valores de k y n . Recuerde que ln k = A; n = B

k = ...………………………………………… n = ………………………….. ………

Método estadístico

5.4 Para aplicar el método de los cuadrados mínimos complete la Tabla 3, solo hasta la penúltima columna.

Tabla 3

N	L_j	T_j	$X_j = \ln L$	$Y_j = \ln T$	X_jY_j	X_j^2	$(Y_j - BX_j - A)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
$\sum$							

5.5 Con los datos de la Tabla 3, aplique las fórmulas (8), (9) y halle el intercepto A y la pendiente B, y con ellos los valores de k y n:

A = ……...….............................………… B = ……..............................……...............................…

k = ………….......…....................……… n = ...…………..……

5.6 Con los valores de A y B hallados en el item anterior, llene ahora la última columna de la Tabla 3 y con la ecuación (12) halle las incertidumbres en B y en A:

ΔB = ………………………………………… ΔA = ………………......………………………

5.7 Considerando la propagación de errores en mediciones indirectas, utilice ΔA y ΔB para determinar los errores Δk y Δn.

Δk = ……………………………........………… Δn = ……………………………………………

5.8 Escriba la relación funcional entre T y L (ecuación empírica del periodo del péndulo simple $T = k\,L^n$ con valores numéricos de k y n).

....

6. RESULTADOS ( )

Magnitud	**Método**	
	Gráfico	**Estadístico**
A ± ΔA		
B ± ΔB		
k ± Δk		
n ± Δn		
Ecuación empírica		

7. CONCLUSIONES ( )

7.1 ¿Cuál de los métodos utilizados es de mayor confiabilidad y por qué?

....

....

7.2 ¿Diga por qué los métodos gráfico y estadístico son complementarios?

....

....

7.3 El período del péndulo simple está dada por: $T = 2\pi\sqrt{L/g} = (2\pi/\sqrt{g})L^{1/2}$.Comparando esta expresión con la obtenida experimentalmente, se tiene que: $k = 2\pi/\sqrt{g}$ utilizando esta relación encuentre el valor de la aceleración de la gravedad

$g = . \dfrac{4\pi^2}{k^2} =$ ....

8. BILBIOGRAFIA (   )

(Es indispensable anotar: Autor, Titulo, Editorial, fecha, edición , pagina)

....

....

....

9. PUNTUALIDAD (   )

Milimetrado (1/2)

Milimetrado (2/2)