

BIOMECANICA

Este capítulo presenta algunos conceptos de la mecánica que son de interés biológico o médico. Comenzamos con una discusión de tamaños importantes en la biología. Luego nos dirigimos a los vectores y las fuerzas en un objeto que está en equilibrio a fin de calcular las fuerzas experimentadas por varios huesos y músculos. Se prosigue con las definiciones para el estudio del movimiento, se introduce el concepto de trabajo mecánico, la elasticidad. Se continúa con el estudio de la hidrostática, la flotabilidad, compresibilidad y viscosidad. Se examinan las fuerzas en los fluidos en reposo y en movimiento. Estos conceptos son aplicados al flujo viscoso laminar en un tubo, que es un modelo para el flujo de la sangre y el flujo de fluido a través de los poros en las membranas celulares. El capítulo termina con una discusión sobre el sistema circulatorio y las fuerzas de resistencia o de arrastre y las fuerzas de sustentación.

1.1 Distancias y tamaños

En biología y medicina, se estudian objetos que abarcan una amplia gama de tamaños: desde secuoyas gigantes a moléculas individuales. Por lo tanto, comenzaremos con una breve discusión de las escalas de longitud. La unidad básica de longitud en el sistema métrico es el metro (m): la altura de un niño de tres años de edad. Para los objetos mucho más grandes o más pequeñas que un metro, se añade un prefijo, como se muestra en la Tabla 1.1. Por ejemplo, un kilómetro se forma añadiendo el prefijo "kilo", que significa mil ($10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$). Los organismos vivos rara vez alcanzan un tamaño de 1 km; los árboles más altos son aproximadamente 0.1 km (100 m) de alto. Algunos animales (ballenas, dinosaurios) alcanzan el tamaño de decenas de metros, pero la mayoría de los organismos están a pocos metros o menos de tamaño.

La diversidad de la vida se hace más evidente a medida que avanzamos hacia abajo para escalas de longitud más pequeña. Una centésima parte de un metro que se llama un centímetro ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$). El centímetro es todavía común en la literatura médica, aunque está pasando de moda entre los puristas métricos.

TABLA 1.1. Prefijos comunes usados en el sistema métrico.

Prefijo	Abreviatura	Multiplicado por
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

que prefieren utilizar prefijos que son factores de un millar. Una milésima parte de un metro es un milímetro ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$), aproximadamente el grosor de una moneda de diez centavos. Todavía podemos ver los objetos de este tamaño, pero no podemos estudiar su detallada estructura a simple vista.

El microscopio nos permite estudiar objetos muchas veces menores que 1 mm. La unidad natural para medir tales objetos es 10^{-6} metros o 10^{-3} mm, llamado un micrómetro (1 micra, $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). El apodo para el micrómetro es la "micra". La Figura 1.1 muestra los tamaños relativos de los objetos en el rango de 1 mm a 1 micra y abarca la escala de longitud de la biología celular. Muchas estructuras pequeñas de nuestro cuerpo son de este tamaño. Por ejemplo, nuestros pulmones consisten de una red de ramificación de los tubos a través de los cuales fluye el aire. Estos tubos terminan en pequeños sacos de aire casi esférica llamados alvéolos [Fig. 1.1 (b)]. Cada alveolo tiene un diámetro de unos $250 \mu\text{m}$, y este tamaño es fijado por las propiedades de difusión de aire. Los protozoos son un tipo pequeño de célula animal. El paramecio es un protozoo sobre $250 \mu\text{m}$ de largo [fig. 1.1 (a)]. Las células en los animales multicelulares tienden a ser algo más pequeños que los protozoos. Por ejemplo, la célula cardíaca de mamíferos (una de las células musculares que se encuentran en el corazón) se muestra en la Figura. 1.1 (c) es de aproximadamente 100 micras de longitud y 20 micras de diámetro. Las células nerviosas tienen una extensión de fibra larga, llamada axón. Los axones vienen en una variedad de tamaños, desde $1 \mu\text{m}$ de diámetro de hasta decenas de micras. El calamar contiene un axón gigante de casi un milímetro de diámetro. Este axón ha jugado un papel importante en nuestra comprensión de cómo trabajan los nervios.

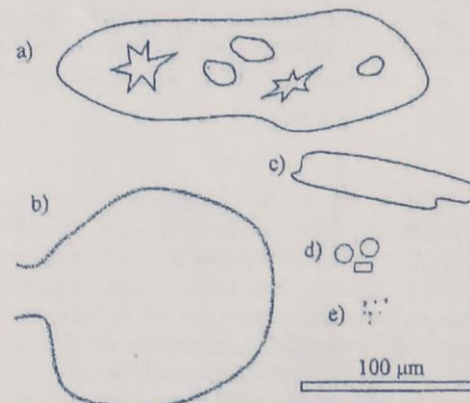


FIGURA 1.1. Los objetos varían en tamaño desde 1 mm hasta 1 micra. (a) Un paramecio, (b) un alvéolo (saco de aire en el pulmón), (c) una célula cardíaca, (d) glóbulos rojos, y (e) bacterias *Escherichia coli*.

Nuestros glóbulos rojos (eritrocitos) llevan oxígeno a todas las partes de nuestro cuerpo. (En realidad, los glóbulos

rojos no son células en absoluto, sino más bien "corpúsculos"). Los glóbulos rojos tienen forma de disco, con un diámetro de alrededor de $8 \mu\text{m}$ y con un espesor de $2 \mu\text{m}$ [Figura 1.1 (d)]. La sangre fluye a través de una red de ramificación de los vasos, los más pequeños de los cuales son los capilares. Cada capilar tiene un diámetro de unos $8 \mu\text{m}$, lo que significa que los glóbulos rojos apenas pueden pasar a través de él una por vez.

Una habilidad valiosa en el estudio de la física es la capacidad de hacer estimaciones del orden de magnitud, es decir, para calcular algo aproximadamente correcto. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular el número de células en el cuerpo. Este es un cálculo difícil, porque las células son de todos los tamaños y formas. Pero para algunos propósitos, sólo se necesita una respuesta aproximada (por ejemplo, en un factor de diez). Por ejemplo: las células son de aproximadamente 10 micras de tamaño, por lo que su volumen es de aproximadamente $(10 \mu\text{m})^3$, o $(10 \times 10^{-6})^3 = 10^{-15} \text{ m}^3$. Un adulto es de aproximadamente 2 m de altura y cerca de 0.3 m de ancho, por lo que nuestro volumen es de aproximadamente $2 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$, ó 0.18 m^3 . Estamos compuestos casi en su totalidad de células, por lo que el número de células en nuestro cuerpo es de $0.18 \text{ m}^3 / 10^{-15} \text{ m}^3$, o aproximadamente 2×10^{14} células. Al final de esta sección se consignan varios ejercicios para cálculos similares de órdenes de magnitud.

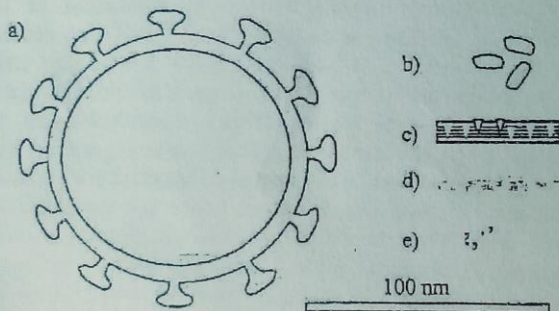


FIGURA 1.2. Los objetos varían en tamaño desde 1 micra hasta 1 nm. (a) el virus de la inmunodeficiencia humana (VIH), (b) moléculas de hemoglobina, (c) una membrana celular, (d) una molécula de ADN, (e) moléculas de glucosa.

La mayoría de las células son más grandes que unas pocas micras. Sin embargo, muchos de las células (llamadas eucariotas) son estructuras complejas que contienen orgánulos de este tamaño. Las mitocondrias, orgánulos donde muchos de los procesos químicos están destinados a proporcionar energía a las células, son típicamente cerca de 2 micras de largo. Protoplastos, organelos que se encuentran en las células vegetales, donde la fotosíntesis transforma la energía luminosa en energía química, son también de 2 micras de largo.

Las células de forma más sencilla se denominan procariotas y no contienen estructuras subcelulares. Las bacterias son células procariotas más comunes. La bacteria *Escherichia*

coli, o *E. coli*, es de aproximadamente $2 \mu\text{m}$ de largo [Fig. 1.1 (e)], y se ha estudiado extensamente

Para examinar las estructuras más pequeñas que las bacterias, hay que medir longitudes más pequeñas que un micrón. Un milésimo de un micrón se llama nanómetro ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). La Figura 1.2 muestra los objetos que tienen longitudes de 1 nm a $1 \mu\text{m}$. La bacteria *E. coli*, que parecía tan pequeño en comparación con las células en la Figura 1.1, son gigantes en la escala de nanómetros de longitud, siendo 20 veces más que la barra de 100 nm de escala en la Figura 1.2. Los virus son pequeños paquetes de material genético envuelto en proteínas. Por sí solos están incapacitados para el metabolismo o la reproducción, por lo que algunos científicos ni siquiera los consideran seres vivos. Sin embargo, pueden infectar a una célula y tomar el control de sus funciones metabólicas y reproductivas. La escala de longitud de los virus es una décima parte de un micrón, o 100 nm . Por ejemplo, el VIH (el virus que causa el SIDA) es más o menos esférica con un diámetro de alrededor de 120 nm [Fig. 1.2 (a)]. Algunos virus, llamados bacteriófagos, pueden infectar y destruir las bacterias. La mayoría de los virus son demasiado pequeños para verlos en un microscopio óptico. La resolución de un microscopio se ve limitada por la longitud de onda de la luz, que es alrededor de 500 nm . Así, con un microscopio podemos estudiar las células en detalle, podemos ver las bacterias sin mucha resolución, y apenas se puede ver los virus, si los podemos ver en todo.

Por debajo de 100 nm , entramos en el mundo de las moléculas individuales. Las proteínas son macromoléculas grandes y complejas que son de vital importancia para la vida. Por ejemplo, la hemoglobina es la proteína que se une a los glóbulos rojos y transporta el oxígeno. La hemoglobina es más o menos esférica, alrededor de 6 nm de diámetro [Fig. 1.2 (b)]. Muchas funciones biológicas se producen en la membrana celular. Las membranas están formadas por capas de lípidos (grasa), a menudo con las proteínas y otras moléculas incrustadas en ellos [Fig. 1.2 (c)]. Una membrana de la célula típica es de aproximadamente 10 nm de espesor. La molécula de trifosfato de adenosina (ATP), esencial para la producción y distribución de energía en las células, es de aproximadamente 2 nm de largo. La energía química está almacenada en moléculas llamadas hidratos de carbono. Una molécula común (y relativamente pequeña) de hidratos de carbono es la glucosa ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$), que es de aproximadamente 1 nm de largo [Fig. 1.2 (e)]. La información genética se almacena en filamentos largos, hélices del ácido desoxirribonucleico (ADN). El ADN es de unos 2.5 nm de ancho, y la hélice completa una vuelta cada 3.4 nm a lo largo de su longitud [Fig. 1.2 (d)].

En la escala de 1 nm y por debajo, llegamos al mundo de las pequeñas moléculas y átomos individuales. El agua es la molécula más común en nuestro cuerpo. Se compone de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. La distancia entre los átomos adyacentes en el agua es cerca de 0.1 nm . La distancia de 0.1 nm (100 pm) se utiliza tanto en longitudes de escala atómica que se ha ganado un apodo: el angstrom (Å). Al igual que el cm, esta unidad está pasando de moda en tanto que el uso de nanómetros se vuelve más común. Átomos individuales tienen un diámetro de 100 o 200 pm .

Por debajo del nivel de 100 pm, dejamos el campo de la biología y entramos en el mundo de la física subatómica. Los núcleos de los átomos son muy pequeños, y sus tamaños se miden en femtómetros ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Uno no puede memorizar el tamaño de todos los objetos biológicos: hay simplemente demasiados. Lo mejor que se puede hacer es recordar algunos hitos en el camino. La Tabla 1.2 contiene una guía aproximada de lo grande que son unos cuantos objetos biológicos importantes. Piense en esto como regla de oro. Dada la diversidad de la vida, sin duda, se encuentran las excepciones a estas reglas, pero al memorizar la Tabla 1.2 tendrá un marco de trabajo general para organizar su pensamiento acerca del tamaño.

TABLA 1.2. Tamaños aproximados de objetos biológicos.

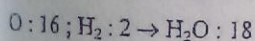
Objeto	Tamaño
Protozoo	100 μm (0.1 mm)
Células	10 μm
Bacteria	1 μm
Virus	100 nm
Macromoléculas	10 nm
Moléculas	1 nm
Átomos	100 pm

EJEMPLO 1.1 Estimación de la densidad del agua (H_2O) en kgm^{-3} . Información práctica: un átomo de oxígeno contiene 8 protones y 8 neutrones. Un átomo de hidrógeno contiene un protón y ningún neutrón. La masa del electrón es despreciable y la separación media entre moléculas 0.31 nm.

Admitiendo que cada molécula se encuentra dentro de un cubo de arista $a = 0.31 \text{ nm}$. El volumen ocupado por una molécula de agua es:

$$V = a^3 = (0.31 \times 10^{-9})^3 = 2.98 \times 10^{-29} \text{ m}^3$$

Como el peso molecular del agua es la suma de los pesos moleculares del Oxígeno y del Hidrógeno se tiene:



Luego en 1 mol de agua o sea en 18 gramos existen 6.02×10^{23} moléculas. Por tanto la masa de una molécula de agua es

$$m = \frac{18 \text{ gramos}}{6.02 \times 10^{23}} = 2.99 \times 10^{-23} \text{ g} = 2.99 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

La densidad del agua es:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2.99 \times 10^{-26} \text{ kg}}{2.98 \times 10^{-29} \text{ m}^3} = 1003 \text{ kg/m}^3$$

Ejercitación

1. Calcular el número de moléculas de hemoglobina de un glóbulo rojo. Los glóbulos rojos son poco más que las bolsas de la hemoglobina, por lo que es razonable suponer que la hemoglobina ocupa todo el volumen de la célula.

Rpta 1.10×10^8

2. Nuestra información genética o genoma se almacena en las partes de la molécula de ADN llamados pares de bases. Nuestro genoma contiene aproximadamente 3000 millones

3×10^9 de pares de bases, y hay dos copias en cada célula. A lo largo de la molécula de ADN, hay un par de bases cada tercera parte de un nanómetro. ¿Qué longitud tendría

la hélice de ADN de una célula si se extendiera en línea? Si la molécula de ADN entera fuera envuelta sobre una esfera, ¿Cuál sería el diámetro de esa esfera?

Rpta: $L = 1 \text{ m}$; $D = 0.318 \text{ m}$

3. Estimación del tamaño de una caja que contiene una molécula de aire. (Pista: ¿Cuál es el volumen de un mol de gas a temperatura y presión normales?) Comparar el tamaño de la caja con el tamaño de una molécula de aire (cerca de 0.1 nm).

Rpta: $V = 3.72 \times 10^{-25} \text{ m}^3$; 72 veces mayor

1.2 Vectores y Suma de Vectores

Un desplazamiento describe cómo llegar de un punto a otro. El desplazamiento tiene una magnitud (distancia del punto 2 al punto 1 en la Figura 1.3) y una dirección (la dirección que parte del punto 1 y llega al punto 2). El desplazamiento del punto 2 desde el punto 1 se designa con A. Los desplazamientos se pueden añadir: el desplazamiento B pone un objeto en el punto 3 partiendo desde el punto 2. El desplazamiento desde el punto 1 al punto 3 es C y es la suma de los desplazamientos A y B:

$$C = A + B \quad (1.1)$$

El desplazamiento es un ejemplo especial de una cantidad más general llamado *vector*. Se encuentra a menudo un vector definido como una cantidad que tiene una magnitud y una dirección. Sin embargo, la definición completa de un vector también incluye el requisito de que los vectores se añaden como los desplazamientos. La regla para la adición de dos vectores es colocar la cola del segundo vector a la cabeza de la primera, la suma es el vector de la cola del primero a la cabeza del segundo. Los vectores se denotan generalmente con caracteres en negrita

Un desplazamiento es un cambio de posición en una dirección específica. Es independiente del punto de partida. Para saber dónde está un objeto, es necesario especificar el punto de partida, así como su desplazamiento a partir de ese punto.

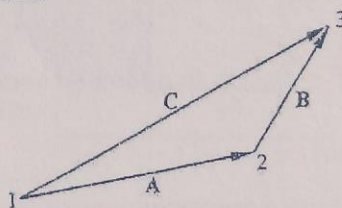


FIGURA 1.3. El desplazamiento C es equivalente al desplazamiento A seguido del desplazamiento B: $C = A + B$.

Los desplazamientos se pueden añadir en cualquier orden. En la Figura 1.4, cualquiera de los vectores A representa el mismo desplazamiento. Primero se puede hacer el desplazamiento B desde el punto 1 al punto 4, seguido por el desplazamiento A de 4 a 3. La suma sigue siendo C

$$C = A + B = B + A \quad (1.2)$$

La suma de varios vectores se puede obtener añadiendo en primer lugar dos de ellos, a continuación, añadir el tercero de esa suma, y así sucesivamente. Esto es equivalente a

colocar la cola de cada vector a la cabeza de la anterior, como se muestra en la Fig. 1.5. Entonces la suma va de la cola del primer vector a la cabeza de la última.

El negativo de un vector A es el vector que, sumado con A da como resultado cero:

$$A + (-A) = 0. \tag{1.3}$$

Tiene la misma magnitud que A y apunta en la dirección opuesta.

La multiplicación de un vector A por un *escalar* (un número sin dirección asociada) multiplica la magnitud del vector A por ese número y deja su dirección invariable.

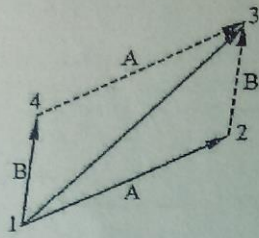


FIGURA 1.4. Vectores A y B se pueden añadir en cualquier orden.

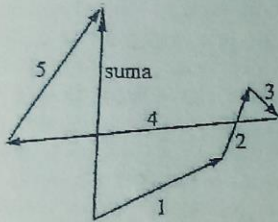


FIGURA 1.5. Adición de varios vectores.

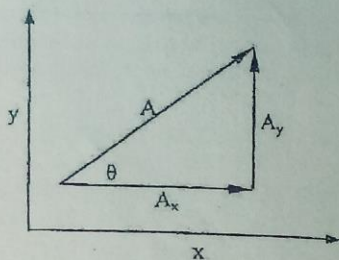


FIGURA 1.6. El vector A tiene por componentes Ax y Ay.

Componentes de los vectores

Considere la posibilidad de un vector en un plano. Si hemos creado dos ejes perpendiculares, podemos considerar un vector A como la suma de vectores paralelos a cada uno de estos ejes. Estos vectores, Ax y Ay en la Figura 1.6, se llaman los *componentes* de A a lo largo de cada uno de los ejes. Si el vector A forma un ángulo θ con el eje x y su magnitud es A, entonces las magnitudes de los componentes son

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos \theta, \\ A_y &= A \sin \theta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La suma de los cuadrados de los componentes es $A_x^2 + A_y^2 = A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$. Ya que, por el

teorema de Pitágoras, éste debe ser A^2 , se obtiene la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \tag{1.5}$$

En tres dimensiones, $A = A_x + A_y + A_z$, las magnitudes de nuevo pueden estar relacionadas con el teorema de Pitágoras, como se muestra en la Fig. 1.7. Del triángulo OPQ, $A_{xy}^2 = A_x^2 + A_y^2$. De triángulo OQR,

$$A^2 = A_{xy}^2 + A_z^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{1.6}$$

En nuestra notación, A_x significa un vector que apunta en la dirección x, mientras que A_x es la magnitud de ese vector. Puede llegar a ser difícil mantener la distinción estricta.

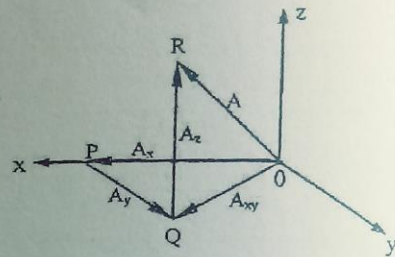


FIGURA 1.7. Adición de componentes en tres dimensiones.

Por tanto, se acostumbra escribir i, j, k que significan vectores de longitud unidad que apuntan en las direcciones x, y, z. (En algunos libros, los vectores unitarios se denotan con $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$). Con esta notación, en lugar de A_x , siempre se podrá escribir $A_x i$. La adición de vectores se hace a menudo más fácil mediante el uso de componentes. La suma de $A + B = C$ se puede escribir como

$$A_x i + A_y j + A_z k + B_x i + B_y j + B_z k = C_x i + C_y j + C_z k$$

Al igual que los componentes se pueden agrupar para dar

$$(A_x + B_x) i + (A_y + B_y) j + (A_z + B_z) k = C_x i + C_y j + C_z k$$

Por lo tanto, las magnitudes de los componentes se pueden agregar por separado:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x, \\ C_y &= A_y + B_y, \\ C_z &= A_z + B_z. \end{aligned} \tag{1.7}$$

EJEMPLO 1.2 Hallar la resultante o suma de los vectores $F_1 = 50 \text{ N}$ y $F_2 = 20 \text{ N}$ de la Figura 1.8

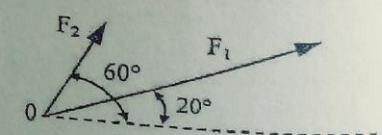


FIGURA 1.8 Resultante de dos vectores fuerza

Designando con F la fuerza resultante; sus componentes se reconocen como:

Resultante en X: $F_x = F_{1x} + F_{2x}$
 Resultante en Y: $F_y = F_{1y} + F_{2y}$
 Reemplazando datos se tiene

$$F_x = F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ = 50 \cos 20^\circ + 20 \cos 60^\circ = 56.98\text{N}$$

$$F_y = F_1 \sin 20^\circ + F_2 \sin 60^\circ = 50 \sin 20^\circ + 20 \sin 60^\circ = 34.42\text{N}$$

Módulo de F

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{56.98^2 + 34.42^2} = 66.57$$

La dirección de F se obtiene con:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = 31.1^\circ$$

EJEMPLO 1.3: Dados los vectores coplanares de 16u, 24u, 20u, 12u de longitud que forman con el eje positivo de las X los ángulos 0°, 75°, 150° y 210° respectivamente. Hallar el módulo y la dirección del vector resultante.

Codificando para aplicación de fórmulas

$$a_1 = 16\text{u}, \theta_1 = 0^\circ; \quad a_2 = 24\text{u}, \theta_2 = 75^\circ$$

$$a_3 = 20\text{u}, \theta_3 = 150^\circ; \quad a_4 = 12\text{u}, \theta_4 = 210^\circ$$

Suma de componentes en X

$$R_x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 + a_4 \cos \theta_4$$

$$R_x = 16 \cos 0^\circ + 24 \cos 75^\circ + 20 \cos 150^\circ + 12 \cos 210^\circ$$

$$R_x = -5.5 \text{ u}$$

Suma de componentes en Y

$$R_y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 + a_4 \sin \theta_4$$

$$R_y = 16 \sin 0^\circ + 24 \sin 75^\circ + 20 \sin 150^\circ + 12 \sin 210^\circ$$

$$R_y = 27.2 \text{ u}$$

Resultante:..... $R = (-5.5) i + (27.2) j$

Módulo:..... $R = \sqrt{(-5.5)^2 + (27.2)^2}$

$$R = 27.75 \text{ u}$$

Dirección:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{27.2}{-5.5} \text{ de donde } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = -78.57^\circ$$

Puesto que la componente R_x es negativa y la componente R_y positiva el vector R se encuentra en el 2do. cuadrante y por lo tanto su dirección con respecto al semieje positivo de las X es

$$\theta_x = -78.57^\circ + 180^\circ = 101.43^\circ$$

Vector en el espacio

El vector r con origen en el origen de coordenadas apunta en dirección arbitraria en el espacio. Esta dirección quedará especificada con el valor de cada uno de los ángulos α , β y γ que el vector r forma respectivamente con los ejes X, Y y Z

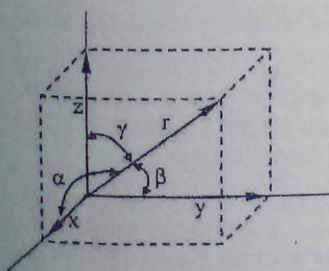


FIGURA 1.9 Vector de posición en tres dimensiones

La expresión en componentes del vector r y su módulo están dados por:

$$r = x i + y j + z k \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.8)$$

las componentes son:

$$x = r \cos \alpha \rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \quad (1.9)$$

$$y = r \cos \beta \rightarrow \beta = \cos^{-1} \left(\frac{y}{r} \right) \quad (1.10)$$

$$z = r \cos \gamma \rightarrow \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) \quad (1.11)$$

EJEMPLO 1.4 Una partícula efectúa un desplazamiento de $6i - 4j + 3k$ partiendo del punto A(3,5,7). Hallar las coordenadas de su nueva posición:

Como se muestra en la figura la partícula se desplaza de A hasta B y se pide la coordenada de éste último punto B(x,y,z)

El vector desplazamiento es:

$$\Delta r = 6 i + (-4) j + 3 k \quad (1.12)$$

Los vectores de posición de los puntos A y B son respectivamente:

$$r_1 = 3 i + 5 j + 7 k$$

$$r_2 = x i + y j + z k$$

La diferencia de estos vectores es Δr , es decir:

$$\Delta r = (x-3) i + (y-5) j + (z-7) k \quad (1.13)$$

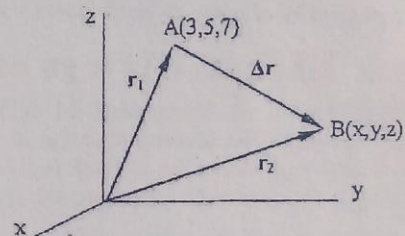


FIGURA 1.10 Desplazamiento $\Delta r = AB$

Igualando los coeficientes de (1.12) y (1.13) y despejando tenemos:

$$x = 9, y = 1, z = 10$$

PRODUCTO ESCALAR. Dados los vectores A y B; su producto escalar o producto interno simbolizado por $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.14)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores; siendo $0 \leq \theta < 180^\circ$.

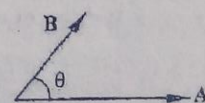


FIGURA 1.11 El producto escalar no es un vector

Se debe tener presente que $A \cdot B$ es una cantidad escalar y no un vector

EJEMPLO 1.5 Si en la Figura 1.11 los módulos de los vectores son $A = 10 \text{ m}$, $B = 5 \text{ m}$ y el ángulo $\theta = 60^\circ$. El producto escalar está dado por $A \cdot B = AB \cos \theta$

$$A \cdot B = (10 \text{ m})(5 \text{ m}) \cos 60^\circ = 25 \text{ m}^2$$

PRODUCTO VECTORIAL. Dados los vectores A y B , su producto vectorial, simbolizado por $A \times B$ es otro vector definido por:

$$A \times B = AB \sin \theta \bar{u} \quad (1.15)$$

El valor de este vector es:

$$|A \times B| = AB \sin \theta \quad (1.16)$$

Donde $0 \leq \theta < 180^\circ$ El vector $A \times B$ es perpendicular al plano determinado por A y B , su dirección indicada por el vector unitario \bar{u} apunta en la forma que avanzaría un tornillo de rosca derecha al ser rotado de A hacia B describiendo el ángulo θ Figura 1.12

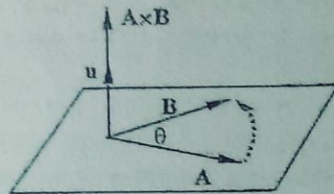


FIGURA 1.12 El producto vectorial es perpendicular al plano formado por A y B

EJEMPLO 1.6 Dados $A = 5\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ y $B = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$, hállese $A \times B$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = (21-16)\bar{i} + (-8-35)\bar{j} + (-20-6)\bar{k}$$

$$A \times B = 5\bar{i} - 43\bar{j} - 26\bar{k}$$

Ejercitación:

1. Reproduzca la Figura 1.6 para los casos siguientes: a) $\theta = 45^\circ$; b) $\theta = 135^\circ$ c) $\theta = 240^\circ$ d) $\theta = 330^\circ$
2. Se efectúa un desplazamiento de 20 m en el plano xy a un ángulo de 70° en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje $+x$. Hallar las componentes x e y . Repítase lo anterior si el ángulo es de 120° ; si el ángulo es de 250° .
Rpta Para 70° : $V_x = 6.84 \text{ m}$, $V_y = -18.8 \text{ m}$
Para 120° : $V_x = -10 \text{ m}$, $V_y = -17.32 \text{ m}$
Para 250° : $V_x = -6.84 \text{ m}$, $V_y = 18.8 \text{ m}$
3. Halle el módulo y dirección de $A+B$ y $A-B$ si $A = -6\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ y $B = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$
Rpta: $|A+B| = 5$, $\alpha = 143^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 53^\circ$;
 $|A-B| = 11.2$, $\alpha = 136^\circ$, $\beta = 58^\circ$, $\gamma = 117^\circ$
4. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza que tiene una componente X de -40 N y una componente Y de -60 N :

Rpta: 72 N , $\theta = 252^\circ$

5. Encontrar el vector desplazamiento del punto $(0, 3, -1)$ al punto $(-2, 6, 4)$. Expresar la respuesta en la notación $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. También obténgase la magnitud del desplazamiento

Rpta $\Delta r = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$; $|\Delta r| = 6.2$

6. A partir del origen y en centímetros la posición de punto A es $r_A = -2\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}$. Se realiza un desplazamiento $4\bar{i} - 2\bar{k}$ desde el punto A al punto B . Obtener la posición vectorial de B a partir del origen

Rpta $r_B = 2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k}$

7. En su calculadora de bolsillo escriba un programa para encontrar la magnitud y dirección de la resultante (suma) de dos vectores

1.3 Movimiento

La parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos se denomina Cinemática. Un cuerpo en movimiento describe una trayectoria, que queda determinada por su posición en cada instante dada por el vector $r = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

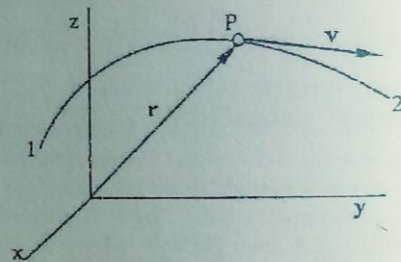


FIGURA 1.13 El vector r señala en cada instante la posición de la partícula P .

La velocidad media v_m entre los tiempos t_1 y t_2 se define como

$$v_m = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \quad (1.17)$$

La velocidad instantánea es

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (1.18)$$

La componente x de la velocidad indica la rapidez con que la componente x de la posición está cambiando. La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo. La aceleración instantánea es

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1.19)$$

El movimiento es Rectilíneo Uniforme MRU, cuando su aceleración es cero y su velocidad constante: $v = x/t$

El movimiento es Rectilíneo Uniformemente Variado MRUV, cuando su aceleración es constante, por tanto su velocidad varía de modo uniforme:

Si se conoce la velocidad inicial v_0 del cuerpo y su posición inicial r_0 , podemos encontrar su posición en función del tiempo del siguiente modo: Puesto que $dv/dt = a$, podemos integrar esta relación:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \rightarrow v - v_0 = at$$

Si ahora tenemos en cuenta que $v = dr/dt$ y usando el resultado anterior

$$\int_{r_0}^r dr = \int_0^t (v_0 + at) dt \rightarrow r - r_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Combinando los resultados anteriores también podemos escribir:

$$r - r_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

EJEMPLO 1.7 El movimiento de caída libre de un cuerpo es aquel que se cumple solo bajo la acción de su propio peso. Para tramos cortos es un movimiento MRUV. Entonces:

Velocidad inicial	$v_0 = 0,$
posición de partida	$r_0 = h$ (altura)
posición de llegada	$r = 0$ (piso)
aceleración	$a = -g$ (aceleración de la gravedad dirigida hacia abajo).

Las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$v = -gt$$

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

EJEMPLO 1.8 Una pulga salta verticalmente y alcanza una altura de 0.10 m. ¿Cuál es su velocidad inicial? Si ha alcanzado esa velocidad mediante una extensión de sus patas en una distancia de 0.0008 m. ¿Cuál ha sido la aceleración inicial?.

Movimiento en el aire bajo los efectos de la gravedad

Posición inicial $r_0 = 0$, posición final $r = 0.10$ m, aceleración $a = -9.8 \text{ m/s}^2$, velocidad final (en la máxima altura) $v = 0$. Usando las ecuaciones del MRUV hallamos v_0

$$r - r_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$0.10 - 0 = \frac{0^2 - v_0^2}{2(-9.8)} \rightarrow v_0 = 1.4 \text{ m/s}$$

Movimiento de impulsión en contacto con el piso en una extensión $d = r - r_0 = 0.0008$ m: velocidad final $v = 1.4$ m/s; velocidad inicial $v_0 = 0$

$$r - r_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$0.0008 = \frac{1.4^2 - 0^2}{2a} \rightarrow a = 1225 \text{ m/s}^2$$

También es de interés especial el caso del movimiento circular, para el cual la variable natural que se utiliza para describir el movimiento es el ángulo descrito por el radio de giro

Así se define la velocidad angular ω y la aceleración angular α , como la variación del ángulo y de la velocidad angular respectivamente

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.20)$$

donde $\Delta\theta$ es el desplazamiento angular y Δt el tiempo. La velocidad lineal o tangencial es $v = \Delta s/\Delta t$ y teniendo en cuenta que el arco Δs , el radio r y el ángulo $\Delta\theta$ están relacionados por

$$\Delta s = r(\Delta\theta) \quad (1.21)$$

se obtienen las siguientes fórmulas importantes:

$$v = \omega r \quad (1.22)$$

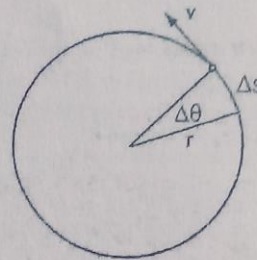


FIGURA 1.14 Movimiento circular

El movimiento es circular uniforme cuando ω es constante y es circular uniformemente acelerado si α es constante. Así hallamos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (1.23)$$

En el movimiento circular uniforme MCU el módulo de la velocidad tangencial permanece constante, pero no así su dirección por lo que existe una aceleración que se denomina **aceleración centrípeta** a_c .

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \text{o} \quad a_c = \omega^2 r \quad (1.24)$$

EJEMPLO 1.9 Supongamos que una partícula dista 0.1 m del eje de un motor que gira a 3000 rpm (revoluciones por minuto). Calcúlese la aceleración centrípeta a la que se ve sometida esta partícula y compárese con la de la gravedad:

Solución. Sea P la partícula rotante a la distancia r del eje

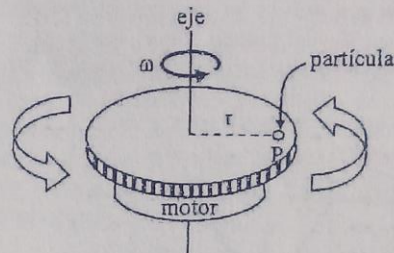


FIGURA 1.15 Volante del motor en rotación

La expresión SI de la velocidad angular es:

$$\omega = 3000 \text{ rpm} = 3000 \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 314 \text{ rad/s}$$

$$a_c = \omega^2 r = (314)^2 (0.1) = 9859.6 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{a_c}{g} = \frac{9859.6}{9.8} = 1006 \quad \text{o} \quad a_c = 1006g$$

esta aceleración muy grande para motores normales es el fundamento de las centrifugadoras

Otro movimiento importante es el movimiento armónico simple cuya aceleración depende del tiempo como

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \quad (1.25)$$

Por integración podemos hallar la velocidad y la posición con las condiciones iniciales de que para $t = 0$, se debe cumplir que $v = 0$ y $x = A$. Los resultados son:

$$v = -A\omega \sin \omega t \quad (1.26)$$

$$x = A \cos \omega t \quad (1.27)$$

Ejercitación

1. Si usted camina 5 km en una dirección de 20° al oeste del norte y 4 km en una dirección 35° al sur del este. ¿Cuál es su desplazamiento total desde el punto de partida?

Rpta 2.87 km, 33.09° al este del norte

2. Un coche viaja en línea recta a 30 km/h durante una hora y a 60 km/h durante 2 horas ¿qué distancia ha recorrido? ¿Cuál es su velocidad media. Rpta. 150 km; 50 km/h

3. En $t = 0$, la posición de un objeto está dada por $r_1 = 10i + 5j$. En $t = 3$ s, la posición es $r_2 = 16i - 10j$. ¿Cuál fue la velocidad media entre $t = 0$ y 3 s si r_1 y r_2 están en metros?

Rpta $v_m = 2i - 5j$ m/s

4. Un coche avanza a la velocidad constante de 60 m/s durante 20 s; entonces frena y se detiene en 10 s, Dibujar las gráficas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo

Rpta

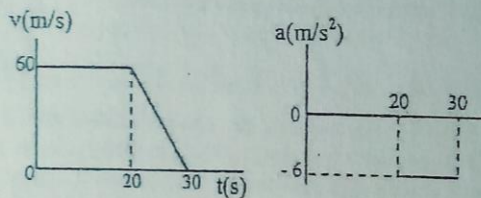


FIGURA 1.16 Gráficas v vs t y a vs t

5. En la siguiente gráfica se muestra la posición de un péndulo en función del tiempo. En el intervalo de 0 a T ; ¿cuándo su velocidad es a) cero b) positiva c) negativa?

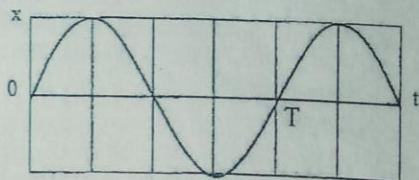


FIGURA 1.17 Movimiento oscilante

Rpta (a) $t = \frac{1}{4} T$ y $t = \frac{3}{4} T$ (b) $0 < t < \frac{1}{4} T$ y $\frac{3}{4} T < t < T$ (c) $\frac{1}{4} T < t < \frac{3}{4} T$

6. ¿Desde qué altura ha de caer el agua para golpear la pala de una turbina con una velocidad vertical hacia abajo de 30 m/s? Rpta: $h = 45.92$ m

7. Un globo que se suelta asciende verticalmente con una velocidad 3 m/s y es atrapado súbitamente por una corriente de aire que se mueve a la velocidad de 14,4 km/h en dirección suroeste. Encuentre la velocidad del globo con respecto a Tierra. Rpta $v = 5$ m/s

Salto vertical

8 ¿A qué altura llegaría una mujer que saltase con la misma velocidad de despegue que una pulga? Rpta: $h = 0.1$ m

9. Un astronauta con traje espacial puede saltar 0.5 m en la superficie de la Tierra. La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 0.4 veces la de la Tierra. Si su velocidad de despegue es la misma. ¿A qué altura llegaría un astronauta que salte en Marte? Rpta: $h = 1.25$ m

1.4 Las fuerzas y el equilibrio traslacional

La parte de la Mecánica que estudia las fuerzas y movimiento se denomina Dinámica. El equilibrio de fuerzas es materia de estudio de la Estática. Hay varias maneras en que podemos introducir la idea de la fuerza dependiendo del problema a la mano y nuestra inclinación filosófica. Para nuestros propósitos actuales será suficiente decir que una fuerza es un empujón o un tirón, que las fuerzas tienen una magnitud y una dirección, y que el lugar a las aceleraciones a través de la segunda ley de Newton.

$$F = ma \quad (1.1)$$

Los experimentos demuestran que las fuerzas se añaden como desplazamientos, por lo que puede ser representadas por vectores.

Se encuentra experimentalmente que un objeto está en equilibrio de traslación cuando la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan en el cuerpo es cero. Equilibrio significa que el objeto o permanece en reposo o continúa moviéndose con velocidad constante. Es decir, no acelera. Traslacional significa que sólo los cambios de posición se están considerando, cambios de orientación del objeto con respecto a los ejes son ignorados. Deben considerarse todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. Si el objeto es una persona de pie en ambos pies, las fuerzas son la fuerza ascendente sobre la planta en cada pie y la fuerza hacia abajo de la gravedad en la persona (exactamente, la suma vectorial de la fuerza gravitatoria en cada célula de la persona).

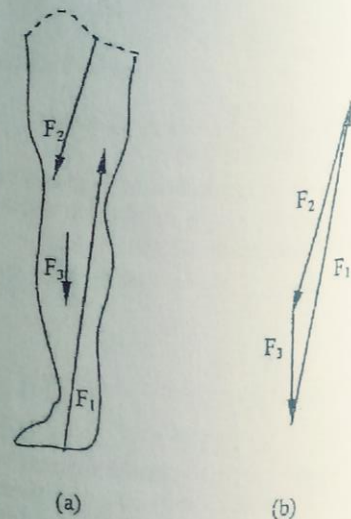


FIGURA 1.18. Fuerzas sobre la pierna en equilibrio. Cuando la fuerza es ejercida por algún otro objeto. (a) Los puntos de aplicación están muy separados. (b) La suma de las fuerzas es cero

También es posible sustituir la suma de la fuerza de la gravedad en cada célula del cuerpo con una única fuerza gravitatoria hacia abajo actuando en un punto el centro de gravedad del cuerpo. Las fuerzas que se suman para dar equilibrio de traslación no tienen por qué actuar todos en un punto en el objeto. Si el objeto es la pierna de una persona y la pierna está en reposo, hay tres fuerzas ejercidas por otros objetos sobre la pierna (Fig. 1.18). La fuerza F_1 es el empuje del suelo hacia la parte inferior del pie. El resto del cuerpo ejerce una fuerza que presiona a la pierna a través de la articulación de la cadera y los músculos circundantes se han sumado para dar F_2 . La fuerza gravitacional de la Tierra sobre la pierna es F_3 . Fuerza F_1 actúa sobre la parte inferior de la pierna, F_2 actúa en la parte superior, y F_3 en algún punto intermedio. Si la pierna está en equilibrio la suma de estas fuerzas es cero, como se muestra en la Figura. 1.18 (b). Aunque los puntos de aplicación de las fuerzas puede ser ignorado en el examen de equilibrio de traslación, que si son importantes para determinar si el objeto está en equilibrio rotacional. Esto se discute en breve. La letra griega Σ (sigma mayúscula) se utiliza generalmente para indicar una suma de cantidades. Con esta notación, la condición de equilibrio de traslación puede ser escrita.

$$\Sigma F_i = 0. \quad (1.29)$$

El subíndice i se utiliza para etiquetar las distintas fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Una notación de esta clase tiene mucho escondido en ella. Esta es una ecuación vectorial, que da lugar a tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= 0 \\ \Sigma F_{iy} &= 0 \\ \Sigma F_{iz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

A menudo, el subíndice i se omite y son las ecuaciones escrito como $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. En esta notación, un componente es positivo si apunta en la misma dirección que el eje positivo y negativo si apunta en sentido opuesto.

A veces, como en el siguiente ejemplo, dibujamos fuerzas en una dirección particular y asumimos que esta dirección es positiva. Si el álgebra posterior da lugar a una solución negativa, la real dirección de la fuerza es opuesta a la dirección asumida.

Como ejemplo, considere la persona apoyada en ambos pies como en la Figura. 1.18. La Tierra tira hacia abajo en algún momento con la fuerza W . El suelo empuja hacia arriba en el pie derecho con la fuerza F_1 y en el pie izquierdo con fuerza F_2 . Para visualizar lo que la condición de equilibrio traslacional nos ofrece acerca de las fuerzas, es necesario trazar el diagrama de fuerzas o diagrama de cuerpo libre de la figura. 1.18 (b).

Este diagrama es una abstracción que ignora los puntos en los que las fuerzas se aplican al cuerpo. Podemos tener éxito con esta abstracción, porque estamos considerando sólo la traslación. Si tenemos en cuenta el equilibrio de rotación, tendremos que volver a dibujar el diagrama que muestra los puntos en que las distintas fuerzas actúan sobre la persona. Si todas las fuerzas son verticales, entonces solo existe un componente de cada fuerza a tomarse en cuenta, y la condición de equilibrio da $F_1 + F_2 - W = 0$, o lo que es lo mismo $F_1 + F_2 = W$.

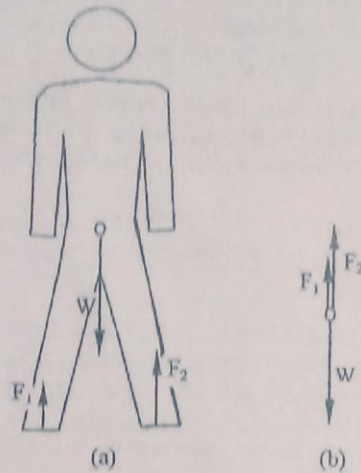


FIGURA 1.19. Una persona de pie. (a) Las fuerzas sobre la persona. (b) Un diagrama de fuerzas o de cuerpo libre.

La fuerza total del piso empujando hacia arriba en ambos pies es igual a la atracción de la tierra hacia abajo.

Si hay una fuerza lateral en cada pie, el equilibrio traslacional ofrece dos condiciones:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} - W &= 0. \end{aligned}$$

Esto es todo lo que se puede aprender de la condición de equilibrio de traslación. Si la persona se para en un pie, a continuación, $F_1 = 0$ y $F_2 = W$. Si la persona se encuentra con la misma fuerza en cada pie, entonces $F_1 = F_2 = W / 2$.

1.5 Equilibrio de rotación. El par motor o torque

Si el objeto ha de estar en equilibrio rotacional, se debe introducir otra condición de fuerzas. Equilibrio rotacional significa que el objeto o no gira o sigue girando a una velocidad constante (con un número constante de revoluciones por segundo). Tenga en cuenta el objeto de la Figura. 1.20, que es una barra rígida libre de girar en torno al punto X de manera que puede girar en el plano del papel. Las Fuerzas F_1 y F_2 se aplican a la barra en el plano del papel a una distancia r_1 y r_2 del pivote y perpendicularmente a la barra. El pivote ejerce la fuerza F_3 en la barra necesaria para mantener el equilibrio de traslación. Si F_1 y F_2 son paralelas entre sí y perpendiculares a la barra, F_3 también ha de ser paralela a F_1 y F_2 , y el equilibrio traslacional requiere que $F_3 = F_1 + F_2$.

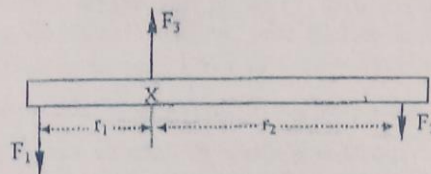


FIGURA 1.20 Una barra libre de rotar alrededor de un punto pivot X

El experimento demuestra que no hay rotación de la varilla si $F_1 r_1 = F_2 r_2$. La condición de equilibrio rotacional. Se

puede indicar en una forma análoga a la de equilibrio de traslación si definimos el par, τ , dada por

$$\tau_i = r_i F_i \tag{1.31}$$

Con esta definición va un convenio de signos algebraicos: el par es positivo si tiende a producir un giro hacia la izquierda. La varilla está en equilibrio rotacional si la suma algebraica de todos los esfuerzos de torsión es cero:

$$\Sigma \tau_i = \Sigma r_i F_i = 0 \tag{1.32}$$

Tenga en cuenta que F_3 no contribuye en nada al par porque r_3 es cero.

El par se define alrededor de un punto determinado, O. Depende de la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza al punto O. La discusión asociada con la Figura 1.20 sugiere que el par se toma alrededor de un eje, en lugar de un punto. En un problema de tres dimensiones el par se toma alrededor de un punto

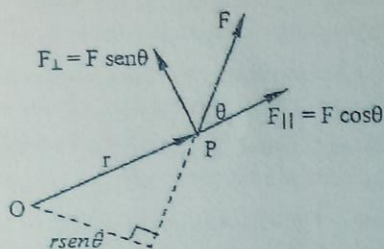


FIGURA 1.21. Una fuerza F se aplica a un objeto en el punto P . El objeto puede girar alrededor del punto O . Los vectores r y F determinan el plano del papel.

Mientras el objeto está en equilibrio de traslación, el par puede ser evaluado en torno a cualquier punto. Este teorema, que no vamos a probar, a menudo permite simplificar los cálculos, porque tomando torques alrededor de ciertos puntos puede ocurrir que algunas fuerzas no contribuyan a la ecuación de torques.

El par también se puede calcular si la fuerza no es perpendicular a la barra. Imagine un objeto libre de girar alrededor del punto O en la Figura 1.21. La fuerza F se encuentra en el plano del papel, pero se aplica en una dirección arbitraria en el punto P . Los vectores r y F determinan el plano del papel si no son paralelas. La fuerza F puede ser resuelta en dos componentes: una paralela a r , $F_{||} = F \cos \theta$, y la otra perpendicular a r , $F_{\perp} = F \sin \theta$. La componente paralela a r no producirá ninguna rotación alrededor del punto O . (Tire de una puerta abierta en paralelo al plano de la puerta; No hay rotación) El par es por lo tanto

$$\tau = r F_{\perp} = r F \sin \theta. \tag{1.33}$$

La distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al punto O es $r \sin \theta$ a menudo se llama el brazo de palanca, y el par es la magnitud de la fuerza multiplicada por el brazo de momento.

El ángulo θ es el ángulo de giro de la dirección de r a la dirección de F . Es positiva si la rotación es en sentido antihorario. Para el ángulo mostrado en la Figura 1.21; $\sin \theta$ tiene un valor positivo, y el par es positivo.

La Figura 1.22(a) muestra un ángulo entre 0° y 180° para los cuales el par y $\sin \theta$ siguen siendo positivos. La Figura 1.22 (b) muestra un ángulo de entre 180° y 360° , para el cual, ambos torque y $\sin \theta$ son negativos. En todos los casos la Ecuación 1.33 da el signo correcto para el torque

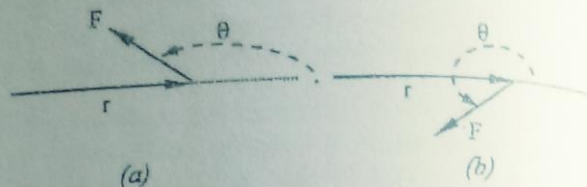


FIGURA 1.22. (a) Cuando θ es entre 0° y 180° , ambos $\sin \theta$ y el par son positivos. (b) Cuando θ está entre 180° y 360° , tanto $\sin \theta$ y el par son negativos.

En resumen: el esfuerzo de torsión debido a la fuerza aplicada a un cuerpo en el punto P debe calcularse sobre algún punto O .

Si r es el vector de O a P , la magnitud del esfuerzo de torsión es igual a la magnitud de r veces la magnitud de F multiplicado por el seno del ángulo entre r y F . El ángulo se mide a la izquierda de r a F .

El torque se puede considerar como un vector, τ . Su magnitud es $F r \sin \theta$. La dirección de τ es perpendicular al plano en que se encuentran r y F . Esta es también la dirección de un eje sobre el cual el par podría causar una rotación. Sin embargo, hay ambigüedad sobre el sentido de asignar al torque. Por convención el torque positivo apunta en la dirección del dedo pulgar de la mano derecha cuando los otros dedos rotan en la dirección positiva de la rotación de r a F . Cuando r y F apuntan en la misma dirección de momento el plano no está definido, la magnitud del torque es cero.

El producto de dos vectores de acuerdo a las reglas anteriores se llama el *producto cruz* o *producto vectorial* de los dos vectores. Se puede utilizar una notación abreviada:

$$\tau = r \times F \tag{1.34}$$

Hay otra manera de escribir el producto cruz. Si ambos r y F se resuelven en componentes, como se muestra en la Figura 1.23, entonces el producto vectorial se puede calcular mediante la aplicación de las normas anteriores a los componentes. Desde que el F_y es perpendicular a r_x , su única contribución es un torque en sentido antihorario $-r_x F_y$. La única contribución de F_x es un torque en sentido horario $-r_y F_x$. La magnitud del producto cruz es por consiguiente

$$\tau = r_x F_y - r_y F_x. \tag{1.35}$$

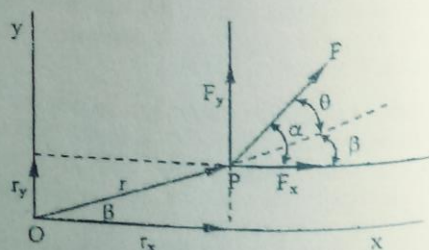


FIGURA 1.23. El producto vectorial $r \times F$ se calcula mediante la resolución de r y F en sus componentes.

Note que esto es la suma de cada componente de la fuerza multiplicada por su brazo de momento

La equivalencia de este resultado con la ecuación 1.5 puede ser verificada escribiendo la ecuación. 1.7 como

$$\tau = (r \cos \beta) (F \sin \alpha) - (R \sin \beta) (F \cos \alpha),$$

$$\tau = rF (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta).$$

Hay una identidad trigonométrica según el cual $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Dado que $\theta = \alpha - \beta$ (de la Figura 1.23), esto es equivalente a $\tau = rF \sin \theta$

Cuando los vectores r y F se encuentran en el plano xy , τ apunta a lo largo del eje z . Si r y F apuntan en direcciones arbitrarias, la ecuación. 1.35 da la componente z de τ . Se puede aplicar el mismo razonamiento para las demás componentes y demostrar que

$$\tau_x = r_y F_z - r_z F_y,$$

$$\tau_y = r_z F_x - r_x F_z,$$

$$\tau_z = r_x F_y - r_y F_x.$$

Si está familiarizado con las normas para la evaluación de los factores determinantes, se verá que esto es equivalente a la notación

$$\tau = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

Fuerza en el tendón de Aquiles

Las condiciones de equilibrio se pueden utilizar para comprender muchos problemas en ortopedia clínica. Dos se tratan en este libro: las fuerzas que a veces provocan la ruptura del tendón de Aquiles en la parte posterior del talón, y las fuerzas en la articulación de la cadera.

El tendón de Aquiles conecta los músculos de la pantorrilla (el gemelo y el sóleo) al calcáneo en la parte posterior del talón (Fig. 1.24). Para calcular la fuerza ejercida por este tendón en el calcáneo, cuando una persona está de pie sobre la punta de un pie, se supone que todo el pie puede considerarse como un cuerpo rígido. Este es nuestro primer ejemplo de la creación de un modelo de la situación real. Tratamos de simplificar la situación real para hacer posible el cálculo, manteniendo las características que son importantes para lo que está sucediendo. En este modelo las fuerzas internas dentro de los pies están siendo ignoradas.

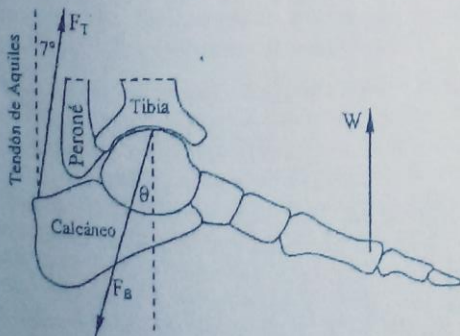


FIGURA 1.24. Anatomía simplificada del pie.

La Figura 1.24 muestra la fuerza ejercida por el tendón en el pie (F_T), la fuerza de los huesos de la pierna (tibia y peroné) en el pie (F_B), y la fuerza del piso hacia arriba, que es igual al peso del cuerpo (W). El peso del pie es pequeño en comparación con estas fuerzas y se descarta. Las mediciones en algunas personas sugieren que el ángulo del tendón de Aquiles con la vertical es de aproximadamente 7° .

El equilibrio traslacional requiere que

$$F_T \cos (7^\circ) + W - F_B \cos \theta = 0, \quad (1.37)$$

$$F_T \sin (7^\circ) - F_B \sin \theta = 0 \quad (1.38)$$

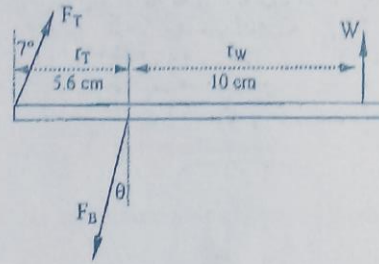


FIGURA 1.25. Fuerzas sobre el pie, dejando de lado su propio peso.

Para escribir la condición de equilibrio de rotación, necesitamos saber, la longitud de los vectores apropiados r_T y r_W , en el supuesto de que los pares se toman respecto del punto en el que F_B se aplica al pie. Con este sencillo modelo se puede ignorar las contribuciones de las componentes horizontales de todas las fuerzas a la ecuación del esfuerzo de torsión. Esto no es esencial (si estamos dispuestos a hacer mediciones más detalladas), pero simplifica las ecuaciones y por lo tanto hace que el proceso sea más claro. Las distancias horizontales medidos por uno de los autores son $r_T = 5.6$ cm y $r_W = 10$ cm, como se muestra en la Figura. 1.25. La ecuación del par resultante es:

$$10W - 5.6F_T \cos 7^\circ = 0 \quad (1.39)$$

Esta ecuación se puede resolver para la tensión en el tendón:

$$F_T = \frac{10W}{5.6 \cos 7^\circ} = 1.8W \quad (1.40)$$

Este resultado se puede utilizar ahora en la Ecuación. 1.29 para encontrar $F_{By} = F_B \cos \theta$:

$$(1.8) (W) (0.993) + W = F_B \cos \theta,$$

$$2.8W = F_B \cos \theta \quad (1.41)$$

De las ecuaciones. 1.30 y 1.32, obtenemos

$$(1.8) (W) (0.122) = F_B \sin \theta$$

$$0.22W = F_B \sin \theta \quad (1.42)$$

Las ecuaciones 1.41 y 1.42 se elevan al cuadrado y se suman y al resultado se toma la raíz cuadrada para obtener $F_B = 2.8W$, mientras que al ser divididos resulta

$$\tan \theta = 0.22/2.8 = 0.079,$$

$$\theta = 4.5^\circ$$

La tensión en el tendón de Aquiles es casi el doble del peso de la persona, mientras que la fuerza ejercida sobre la

pierna por el astrágalo es casi tres veces el peso corporal. Así, podemos entender por qué el tendón puede romperse.

Fuerzas sobre la cadera

Las fuerzas en la articulación de la cadera pueden ser varias veces el peso de la persona, y el uso de un bastón puede ser muy eficaz en la reducción de ellos.

Cuando una persona camina, hay momentos en que sólo un pie está sobre el piso. Existen dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo como un todo: el peso W y el empuje hacia arriba del piso sobre el pie N . La fuerza peso puede considerarse que actúa en el centro de gravedad del cuerpo. El centro de gravedad está situado en la línea media (si las extremidades se colocan simétricamente), generalmente en la parte inferior del abdomen.

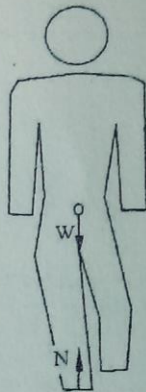


FIGURA 1.26. Una persona de pie sobre un pie debe colocar el pie por debajo del centro de gravedad, que se encuentra en o cerca de la línea media.

Si se toman torques alrededor del pie, entonces el centro de gravedad debe estar directamente sobre el pie de manera que no habrá torque de ninguna de las fuerzas. Esta situación se muestra en la Figura. 1.26. La condición de equilibrio traslacional requiere que $N = W$.

La anatomía de la pelvis, las caderas y las piernas se muestra esquemáticamente en la Figura. 1.26. Catorce músculos y ligamentos de la pelvis se conectan en el fémur. Amplias medidas de las fuerzas ejercidas por el músculo abductor de la cadera han sido hechas por Inman (1947). Si la pierna se considera un sistema aislado como en la Figura. 1.26, las fuerzas actuantes son:

F: La fuerza neta de los músculos abductores, que actúa sobre el trocánter mayor. Estos músculos son principalmente el glúteo medio y glúteo menor, que se muestra como una única banda de músculo en la Figura. 1.26.

R: La fuerza del acetábulo (la cavidad de la pelvis) en la cabeza del fémur.

N: La fuerza hacia arriba del piso en la parte inferior del pie (en este caso, igual a W).

W_L : El peso de la pierna, actuando verticalmente hacia abajo en el centro de gravedad de la pierna. $W_L = W/7$ [Williams y Lissner (1962)].

Inman encuentra que F actúa con un ángulo de alrededor de 70° con la horizontal. En un adulto normal, la distancia

entre el trocánter mayor hasta la línea media es de unos 7 cm, la distancia horizontal desde el trocánter mayor hasta el centro de gravedad de la pierna es de unos 10 cm, la distancia desde el trocánter mayor hasta la mitad de la cabeza del fémur es de aproximadamente 7 cm.

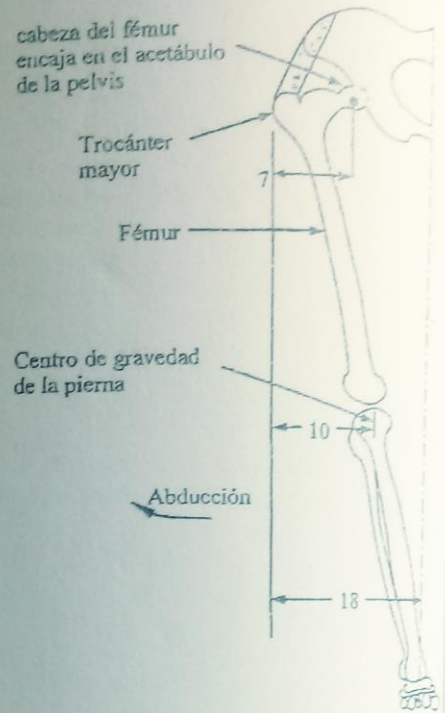


FIGURA 1.27. Características pertinentes de la articulación de la pierna.

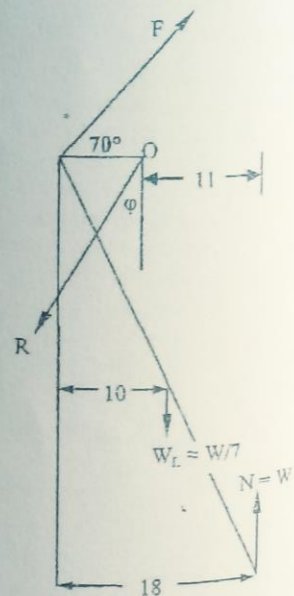


FIGURA 1.28. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan en la pierna. Los torques se toman con respecto al punto O , que es la intersección de la línea de acción de R y una línea horizontal que pasa por el punto de aplicación de F . Este punto está a 7 cm hacia la línea media (media) del trocánter mayor.

e unos 12
or hasta e
cm y l
dad de l

tanto 10/18 de la distancia horizontal desde el trocánter mayor hasta el pie: $(10)(12)/18 = 6.67$ cm. El brazo de momento es $7 - 6.67 = 0.33$ cm. La ecuación del torque es $-F \sin(70^\circ)(7) + (W/7)(0.33) + (5W/6)(5) = 0$.

Se resuelve escribiéndolo como $-6.58F + 0.047W + 4.17W = 0$,
 $F = 0.64W$.

A pesar de que el bastón sólo admite una sexta parte del peso del cuerpo, F se ha reducido de $1.6W$ a $0.64W$ por el cambio en el brazo del momento. La fuerza del acetábulo en la cabeza del fémur puede determinarse a partir de las condiciones de equilibrio de traslación:

$$F \cos(70^\circ) - R_x = 0, \quad R_x = 0.22W,$$

$$F \sin(70^\circ) - R_y - W/7 + 5W/6 = 0, \quad R_y = 1.29W.$$

La fuerza resultante R tiene magnitud $(R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 1.3W$. Esto se compara con el $2.4W$ valor sin el bastón.

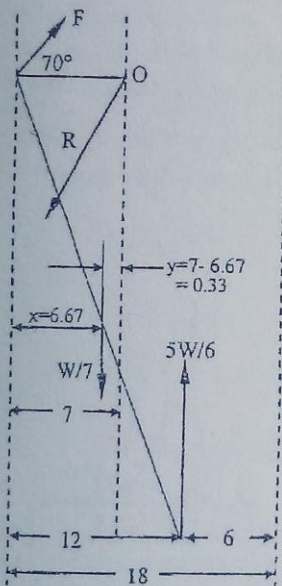


FIGURA 1.31. Diagrama de fuerzas sobre la pierna cuando se utiliza un bastón y la pierna está a 6 cm de la línea media.

La fuerza en la articulación se ha reducido en algo más que el peso corporal. Es interesante leer lo que un cirujano ortopédico tenía que decir sobre el uso del bastón.

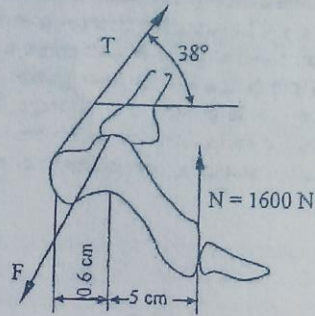
"El paciente con un cirujano ortopédico sabio camina con muletas durante seis meses después de una fractura del cuello del fémur. Si él usa un palo por un tiempo más largo, más sabio el médico, más largo el tiempo. Si su asesor médico, su fisioterapeuta, sus amigos, y su orgullo lo conducen finalmente a abandonar el palo, mientras que él todavía necesita de uno, él va a cojear. Cojea en un esfuerzo inconsciente para reducir la tensión en la cadera debilitada. Si hay movimiento restringido, no puede desplazar el peso de su cuerpo, pero se apresura a quitar el peso de la articulación de la cadera dolorosa al tiempo que

anatom

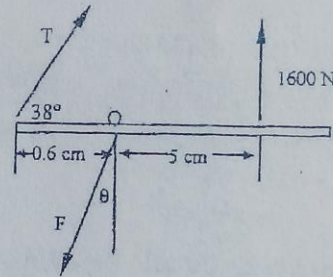
fuer
respe
ción
ento
la lit

su autoestima hace reducir la cojera al mínimo. La excesiva presión de la fuerza en la cadera afectada se cobra su peaje en el envejecimiento produciendo cambios degenerativos. Él no debería tirar el palo desde entonces".

EJEMPLO 1.10 Cuando una persona se agacha, la geometría del talón es como se muestra. Determine T y F. Suponga que todas las fuerzas actúan en el plano del dibujo.



(a) Pie soportando todo el peso de la persona



(b) Diagrama del cuerpo libre (DCL)

FIGURA 1.32 (a) El pie de una persona agachada y (b) DCL

Equilibrio traslacional

$$\Sigma F_x = T \cos 38^\circ - F \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = T \sin 38^\circ + 1600 - F \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Equilibrio rotacional

$$\Sigma \tau_O = 1600(5) - T \sin 38^\circ(0.6) = 0 \quad (3)$$

De (3) resulta $T = 21657$ N (4)

Utilizando (4) en (1) y (2):

$$F_x = F \sin \theta = 17066 \quad (5)$$

$$F_y = F \cos \theta = 14933 \quad (6)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{17066^2 + 14933^2} = 22677$$

Dividiendo (5) entre (6)

$$\tan \theta = \frac{17066}{14933} = 1.1428 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(1.1428) = 49^\circ$$

1.6 Trabajo

Hasta ahora, este capítulo ha considerado sólo las situaciones en las que un objeto está en equilibrio. Si la

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura. 1.28. El centro de la cabeza del fémur a su vez está muy cerca de la intersección de la línea de acción de R con la línea horizontal trazada desde el punto de aplicación de F. Esto significa que si se toman torques alrededor de este punto de intersección (punto O), no habrá contribución de R o de la componente horizontal de F. La intersección está aproximadamente a 7 cm hacia la línea media desde el punto de aplicación de F. Desde que $N = W$ y $W_L \approx W/7$.

Las ecuaciones del equilibrio son:

$$\Sigma F_y = F \text{ sen } (70^\circ) - R_y - W/7 + W = 0, \quad (1.43)$$

$$\Sigma F_x = F \text{ cos } (70^\circ) - R_x = 0, \quad (1.44)$$

$$\Sigma \tau = -F \cdot \text{sen } (70^\circ) (7) - (W/7) (10 - 7) + W (18 - 7) = 0. \quad (1.44a)$$

La última de estas ecuaciones se puede escribir como $11W - 3W/7 - 6.6F = 0$, de donde $F = 1.6W$. La magnitud de la fuerza en los músculos abductores es aproximadamente 1.6 veces el peso corporal

Las ecuaciones 1.44 y 1.43 ahora se pueden utilizar para buscar R_x y R_y :

$$R_x = F \text{ cos } (70^\circ) = (1.6) (W) (0.342) = 0.55W,$$

$$R_y = F \text{ sen } (70^\circ) + 6W/7 = 1.6W(0.94) + 0.86 W = 2.36W.$$

El ángulo que forma R con la vertical está dada por

$$\tan \phi = R_x/R_y = 0.23,$$

$$\phi = 13^\circ.$$

La magnitud de R es $R = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 2.4 W$.

Si el paciente no hubiese puesto el pie por debajo del centro de gravedad del cuerpo, el brazo de palanca del único par positivo, $11W$, podría haber sido mucho menos, y esto habría sido compensado por un valor menor de F. Esto puede lograrse haciendo que el paciente use el bastón en el lado opuesto, de modo que el pie no tiene que estar justo debajo del centro de gravedad. Esto se estudiará en la siguiente sección. Por el contrario, si el paciente lleva una maleta en la mano opuesta, el centro de masa se mueve lejos de la línea media, el pie todavía tendría que ser incluida en el centro de masa, y el brazo de momento, y por lo tanto F, sería aún mayor.

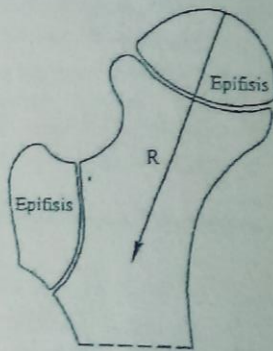


FIGURA 1.29. La epífisis femoral y la dirección de R.

Una conclusión interesante del estudio de Inman fue que la fuerza R siempre actúa a lo largo del cuello del fémur en

una dirección tal que la epífisis femoral se enfrenta lateralmente muy poco sobre ella. La epífisis es la parte de crecimiento del hueso (Fig. 1.29) y no está muy bien conectado con el resto del hueso. Si hubiera una fuerza lateral apreciable, la epífisis se deslizaba hacia un lado, de hecho a veces lo hace. Este es un problema grave, que si el suministro de sangre a la epífisis está comprometido, no habrá más crecimiento del hueso.

Supongamos que, por alguna razón, los músculos glúteos se separan. El paciente no puede dejar de aplicar la fuerza con el trocánter mayor; la Ecuación 1.44 muestra que, en consecuencia, R_x debe ser cero. Este cambio en la dirección de R causa una rotación de la placa de crecimiento gradual y una remodelación del fémur.

El uso de un bastón

El bastón es beneficioso si se utiliza en el lado opuesto a la cadera afectada (Fig. 1.30). Ignoramos el hecho de que el brazo que sostiene el bastón se ha movido, por lo tanto cambiando ligeramente el centro de masa, y suponemos que la fuerza del piso sobre el bastón es vertical. Si asumimos que la punta del bastón está a unos 30 cm (12 pulgadas) desde la línea media y soporta una sexta parte del peso del cuerpo, entonces podemos aplicar las condiciones de equilibrio para saber que

$$N + W/6 - W = 0, \text{ así } N = 5W/6.$$

Tomando los torques alrededor del centro de masas da

$$(30)(W/6) - x (5/6)W = 0, x = 6 \text{ cm.}$$

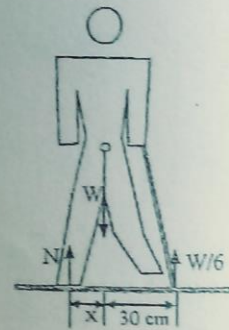


FIGURA 1.30. Una persona con un bastón en el lado izquierdo (vista frontal) a favor de la cadera derecha.

Mantener los pies a 6 cm de la línea media reducirá la fuerza en el músculo y la articulación. Para saber cuánto considere el diagrama de fuerzas en la Figura. 1.31. La parte más difícil del problema es la identificación de los diferentes brazos de momento. Suponga que el ligero movimiento de la pierna no ha cambiado el punto sobre el que tomamos momentos (punto O). Una vez más, R_x contribuye a la suma de momentos alrededor de este punto. La distancia horizontal de F a partir de este punto sigue siendo de 7 cm. La fuerza del piso sobre esta pierna es $5W/6$, y su brazo de momento es de $18 - 6 - 7 = 5$ cm. El peso de la pierna, $W/7$, actúa en el centro de masa de la pierna, que sigue siendo $10/18$ de la distancia desde el trocánter mayor hasta el pie. Su posición horizontal por

fuerza total sobre el objeto no es cero, el objeto experimenta una aceleración a determinada por la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$

El estudio de cómo las fuerzas producen aceleraciones se llama dinámica. Es un campo amplio que se discutirán sólo brevemente aquí. Supongamos que un objeto se mueve a lo largo del eje x con velocidad v . Si está sujeto a una fuerza F en la dirección x , se acelerará, y la velocidad va a cambiar de acuerdo a

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (1.45)$$

Multiplicando miembro a miembro por la igualdad $dx = v dt$ y simplificando se obtiene:

$$F dx = m v dv$$

Integrando a ambos lados se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{v_1}^{v_2} m v dv$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1.46)$$

En este contexto, es útil definir: a) El trabajo W realizado por la fuerza F al desplazar la masa desde la posición x_1 hasta la posición x_2 y b) La energía cinética E_k ganada por la masa al cambiar su velocidad desde v_1 hasta v_2 como resultado del trabajo de la fuerza F

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Por tanto la Ecuación (1.46) queda expresada de la siguiente manera:

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

$$W = \Delta E_k$$

Mientras actúa F el objeto se acelera con cambios en su energía cinética. Podemos tener una cierta comprensión de cómo son los cambios notando que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} = F v \quad (1.47)$$

Por tanto Fv es la rapidez a la que la energía cinética está cambiando con el tiempo. Es decir es la potencia originada por la fuerza F . Las unidades de la energía cinética son $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ o julios (J), las unidades de potencia son J s^{-1} o vatios (W). Si v y F son positivos, la aceleración incrementa la velocidad del objeto, aumenta la energía cinética, y la potencia es positiva. Si v y F son negativos, disminuye v (se hace más negativo), pero la magnitud de la velocidad aumenta. La energía cinética aumenta con el tiempo y la potencia es positiva. Si v y F apuntan en direcciones opuestas, entonces el efecto de la aceleración es reducir la magnitud de v , la energía cinética disminuye, y la potencia es negativa.

El aumento de la energía cinética del cuerpo cuando se mueve de la posición 1 (en el tiempo 1) hasta la posición 2 (en tiempo de 2) es igual al trabajo realizado sobre el

cuerpo por la fuerza F . El trabajo realizado en el cuerpo por la fuerza F es el área bajo la curva de F vs x , entre los puntos x_1 y x_2 . Esto se muestra en la Figura 1.33.

Si varias fuerzas actúan sobre el cuerpo, entonces la aceleración viene dada por la segunda ley de Newton, donde F es la fuerza total sobre el cuerpo. El cambio en la energía cinética es por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza total o la suma del trabajo realizado por cada fuerza individual.

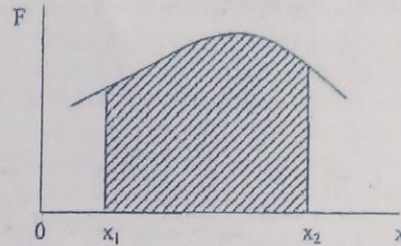


FIGURA 1.33. El trabajo realizado por F es el área sombreada debajo de la curva entre x_1 and x_2 .

Para el caso de que las direcciones de los vectores velocidad v y fuerza F forman un ángulo θ la potencia está dada por el producto escalar de los vectores v y F :

$$P = F \cdot v \quad (1.48)$$

$$P = F v \cos \theta \quad (1.49)$$

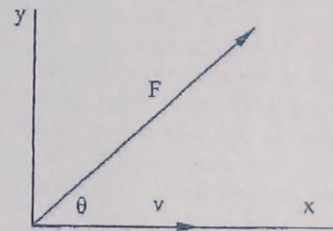


FIGURA 1.34. Alineando los ejes de modo que v este alojado en el eje x y F está en el plano xy se muestra que la expresión alternativa para $F \cdot v$ es $F v \cos \theta$.

La Ecuación 1.49 indica que la fuerza neta no es F sino $F \cos \theta$ o sea la componente en la dirección del movimiento

En resumen, la potencia es

$$P = \frac{dE_k}{dt} = F \cdot v = F v \cos \theta \quad (1.50)$$

La Ecuación 1.50 se puede integrar observando que:

$$dE_k = F \cdot v dt = F \cdot ds$$

donde ds es el vector desplazamiento

$$W = \Delta E_k = \int F \cdot ds \quad (1.51)$$

Esta es la expresión general para el trabajo realizado por la fuerza F sobre una masa puntual que sufre el desplazamiento s .