

# TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

## APÉNDICE A

### INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

#### A.1 Productos de vectores.

Un vector es un segmento de línea dirigido que contiene dos elementos de información:

- Dirección
- Magnitud

Una cantidad escalar no tiene dirección y por lo tanto, no posee información sobre la misma. De acuerdo con esta definición un número, ya sea real o complejo, es un escalar.

Los productos de utilidad son los productos de escalares y los productos de vectores.

**El producto punto** es el producto de dos números escalares y da como resultado otro escalar.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{\mathbf{A}\mathbf{B}}$$

**Ecuación A.1**

También:

En coordenadas rectangulares  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  **Ecuación A.2a**

En coordenadas cilíndricas  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z$  **Ecuación A.2ab**

En coordenadas esféricas  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$  **Ecuación A.2ac**

Donde los vectores están definidos en los distintos sistemas de coordenadas ortogonales como:

En coordenadas rectangulares  $\mathbf{A}(X, Y, Z) = (A_x, A_y, A_z) = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$  **Ecuación A.3a**

En coordenadas cilíndricas  $\mathbf{A}(r, \phi, Z) = (A_r, A_\phi, A_z) = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$  **Ecuación A.3b**

En coordenadas esféricas  $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = (A_r, A_\theta, A_\phi) = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$  **Ecuación A.3c**

Las propiedades del producto punto son:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

**Ecuación A.4a**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \quad \text{Ecuación A.4b}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{Ecuación A.4c}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad \text{Ecuación A.4d}$$

El ángulo más pequeño entre dos vectores se define como:

$$\theta_{AB} = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \quad \text{Ecuación A.5}$$

Nótese que si A y B son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es de 90°,  $\theta_{AB}=90^\circ$  y  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Y por lo tanto, con respecto a los vectores unitarios en coordenadas rectangulares:

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad \text{Ecuación A.6a}$$

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0 \quad \text{Ecuación A.6b}$$

**El producto cruz** es el producto de dos números vectoriales y da como resultado otro vector.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \mathbf{a}_n \quad \text{Ecuación A.7}$$

Donde  $\mathbf{a}_n$  es el vector unitario normal a al plano que contiene a los vectores A y B.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{Ecuación A.8a}$$

Y también se puede expresar como:

$$(\mathbf{A}_y \mathbf{B}_z - \mathbf{A}_z \mathbf{B}_y) \mathbf{a}_x + (\mathbf{A}_z \mathbf{B}_x - \mathbf{A}_x \mathbf{B}_z) \mathbf{a}_y + (\mathbf{A}_x \mathbf{B}_y - \mathbf{A}_y \mathbf{B}_x) \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.8b}$$

Las propiedades del producto cruz son:

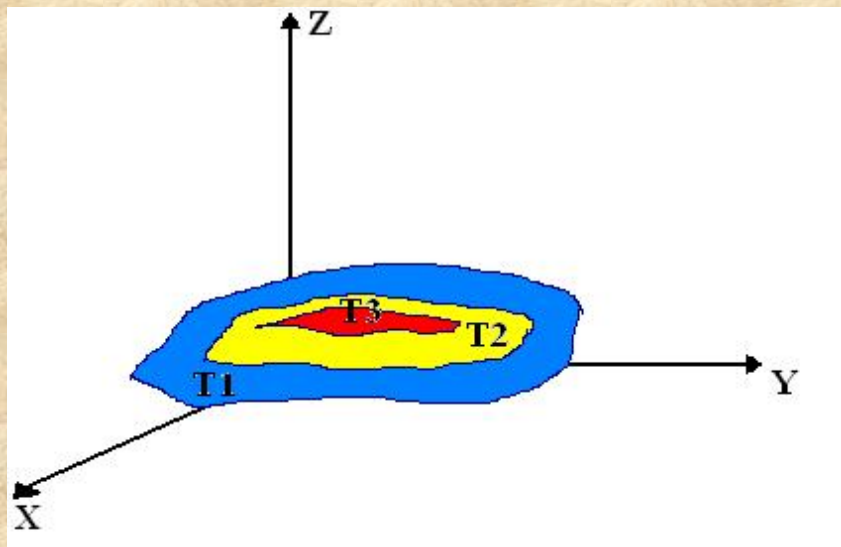
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \text{Ecuación A.9a}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad \text{Ecuación A.9b}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \quad \text{Ecuación A.9c}$$

## A.2 Campos escalares y campos vectoriales.

**CAMPOS ESCALARES.-** Más que definir matemáticamente un campo escalar, es mejor ilustrar el concepto con un ejemplo. El ejemplo más común para ilustrar este concepto es el de la distribución de temperatura en un cuarto o en una habitación.



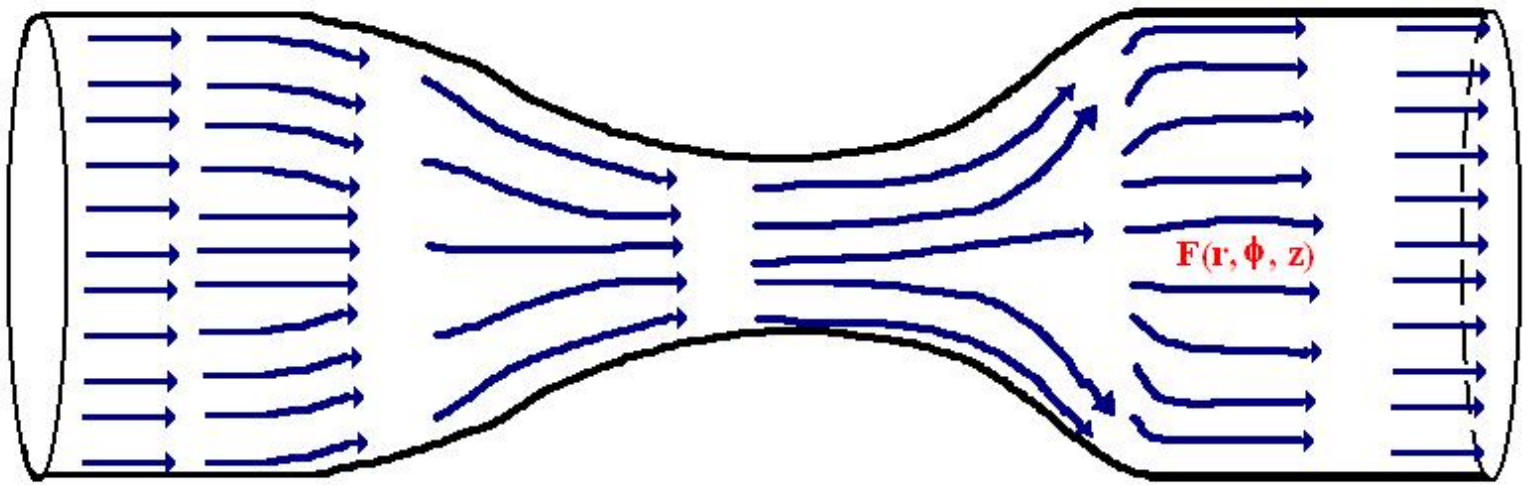
**Figura A.1 Campo escalar de temperatura.**

En la figura A.1 se muestran líneas o contornos de temperatura constante, por ejemplo, la temperatura es  $T_1$  en todos los puntos del contorno  $T_1$ , sombreado en color rojo y así con los contornos  $T_2$  y  $T_3$ . A esta distribución de temperatura se le conoce como campo en el sentido de que la temperatura va a tener distintos valores para distintas posiciones o ubicaciones del espacio (cuarto o habitación) y en diferentes tiempos. Para denotar esta tendencia de la temperatura  $T$  con respecto a la posición en  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y con respecto al tiempo, se escribe:

$$T(X, Y, Z, t) \text{ Ecuación A.10}$$

En un campo escalar la cantidad o variable de interés, en este caso la temperatura, es una cantidad escalar porque su efecto no está asociado a con ninguna dirección en particular y los distintos valores que puede tomar NO dependen de la dirección, sino únicamente de la ubicación o posición del punto de interés  $P(X,Y,Z)$  y del tiempo de de observación.

**CAMPOS VECTORIALES.-** La diferencia básica entre un campo escalar y un campo vectorial es que la cantidad de interés en un campo vectorial tiene una propiedad direccional, así como una magnitud asociada a una dirección en particular y a la ubicación en el espacio. El ejemplo más común para ilustrar este concepto es de el flujo de un material líquido en una tubería, como se muestra en la figura A.2.



**Figura A.2 Ilustración del concepto de campo vectorial.**

El flujo del líquido en distintos puntos de la tubería tiene una dirección (distinta) asociada con la tubería, así como una magnitud (razón de flujo en litros/segundo). El flujo en distintos puntos se denota con vectores. Las longitudes de los vectores son proporcionales a la razón de del flujo y la dirección de cada vector (flecha) muestra la dirección del flujo en esos puntos.

La dependencia del campo vectorial  $F$  (flujo) de la posición y del tiempo se puede denotar en coordenadas rectangulares o cilíndricas:

$$\mathbf{F}(X, Y, Z, t) \text{ ó } \mathbf{F}(r, \phi, Z, t) \quad \text{Ecuación A.11}$$

Tanto los campos escalares, como los campos vectoriales tienen información del valor de una variable (temperatura o flujo) en distintos puntos del espacio y tal vez en distintos tiempos. Los campos vectoriales también tiene información sobre la dirección del efecto de la variable de interés.

### **A.3 El gradiente de un campo escalar.**

la operación gradiente que se va a considerar es un concepto de cálculo vectorial y está relacionada con la razón de cambio espacial de un campo escalar.

El gradiente de un campo escalar nos indica la dirección y la magnitud de la máxima razón de cambio espacial (no temporal) del campo escalar.

La operación matemática gradiente se basa en el operador Nabla, el cual se define matemáticamente como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial X} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial Y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.12}$$

Y la operación gradiente se define, en coordenadas rectangulares, como:

$$\text{Grad}f = \nabla f(X, Y, Z) = \frac{\partial f}{\partial X} a_x + \frac{\partial f}{\partial Y} a_y + \frac{\partial f}{\partial Z} a_z$$

Ecuación A.13

Nótese que el resultado de la operación gradiente es un vector.

En coordenadas cilíndricas la operación gradiente se define como:

$$\text{Grad}f = \nabla f(r, \phi, Z) = \frac{\partial f}{\partial r} a_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} a_\phi + \frac{\partial f}{\partial Z} a_z$$

Ecuación A.14

En coordenadas esféricas la operación gradiente se define como:

$$\text{Grad}f = \nabla f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} a_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} a_\theta + \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} a_\phi$$

Ecuación A.15

Por ejemplo, suponga que se desea escalar una montaña en bicicleta. Si se cuenta con un mapa topográfico que muestre los contornos de elevación constante, entonces sería posible planear la ruta, con el fin de evitar pendientes muy pronunciadas. En la figura A.3 los contornos de elevación constante que están más juntos indican un cambio muy rápido en la elevación, en una distancia muy corta, esto implica que en esa zona hay una pendiente muy pronunciada. Se muestran dos posibles rutas, R1 y R2, interpretando el mapa es posible concluir que la ruta R1 es más recomendable si se desea evitar las pendientes pronunciadas.

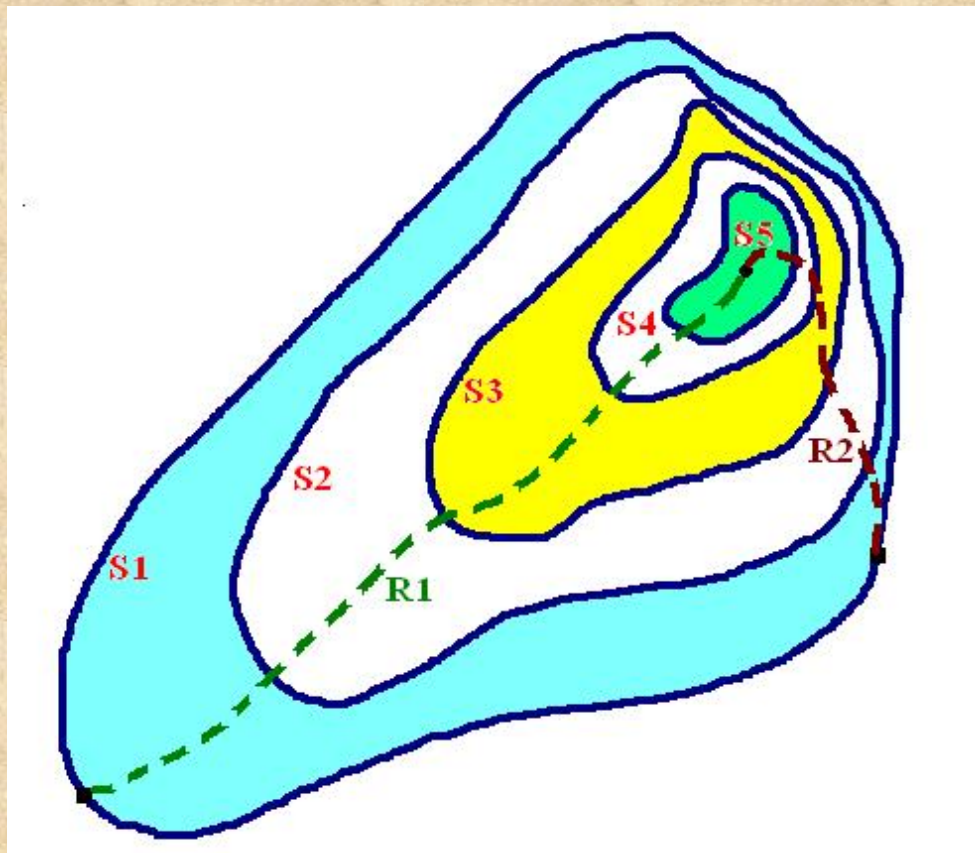


Figura A.3 Ilustración del concepto de campo vectorial.

**Ejemplos sugeridos:** Calcule el gradiente de los siguientes campos escalares:

a)  $f(x,y,z)=XY^2 + 2Z$

b)  $f(r,\varphi,z)=2r\text{Sen}\varphi$

c)  $f(r,\theta,\varphi)=2\theta + r^2$

#### A.4 La integral de línea de un campo vectorial.

La integral de línea es una operación que permite conocer el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo de una ruta o contorno, el cual puede ser cerrado o abierto. La operación consiste en ir sumando los gastos incrementales de energía a lo largo del contorno. Por ejemplo, considérese el contorno **C** mostrado en la figura A.4. En cada punto a lo largo del contorno se obtiene la componente de fuerza dirigida hacia, o en dirección de

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \cos\theta$ , el trabajo requerido para moverse a lo largo de del contorno, desde el punto **a**, hasta el punto **b** es:

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cos\theta dl = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Ecuación A.16

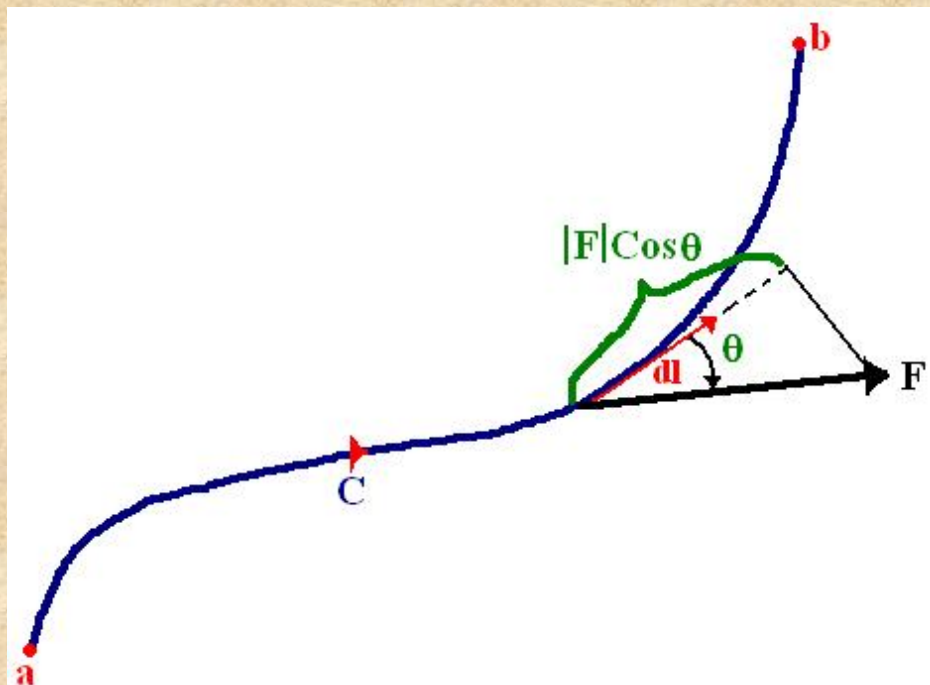


Figura A.4 Contorno o ruta abierta utilizado para ilustrar el concepto de integral de línea.

Donde se ha aplicado el teorema de Pitágoras:

$\text{Sen}\theta = (\text{Hipotenusa})/(\text{Cateto Opuesto})$  y  $\text{Cos}\theta = (\text{Hipotenusa})/(\text{Cateto Adyacente})$ , en este caso el cateto adyacente es la componente de **F** que es tangencial al contorno **C** y es la fuerza de interés.

El trabajo realizado cuando el punto al que se aplica la fuerza **F** se mueve a lo largo del contorno **C** es igual a la integral de línea de la componente

tangencial de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \cos \theta$ ) ya que es la única que aporta la energía para mover el objeto en la misma dirección del contorno  $\mathbf{C}$ , esto último es debido a que la componente tangencial de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\mathbf{C}$  va en la misma dirección que el contorno  $\mathbf{C}$ . Nótese que la dirección del contorno  $\mathbf{C}$  está representada en  $d\mathbf{l}$  y además el objeto se mueve una longitud infinitesimal  $d\mathbf{l}$ . También hay que recordar que para calcular el trabajo es necesario multiplicar fuerza aplicada por distancia recorrida al aplicar esa fuerza.

Nótese también que es una función de la posición a lo largo del contorno, así como  $d\mathbf{l}$ , la cual es tangente al contorno.

$d\mathbf{l}$  es el diferencial de longitud y se puede definir en los tres sistemas de coordenadas:

$$\text{En coordenadas rectangulares } d\mathbf{l} = (d_x, d_y, d_z) = d_x \mathbf{a}_x + d_y \mathbf{a}_y + d_z \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.17a}$$

$$\text{En coordenadas cilíndricas } d\mathbf{l} = (d_r, r d_\phi, d_z) = d_r \mathbf{a}_r + r d_\phi \mathbf{a}_\phi + d_z \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.17a}$$

$$\text{En coordenadas esféricas } d\mathbf{l} = (d_r, r d_\theta, r \text{Sen} \theta d_\phi) = d_r \mathbf{a}_r + r d_\theta \mathbf{a}_\theta + r \text{Sen} \theta d_\phi \mathbf{a}_\phi \quad \text{Ecuación A.17a}$$

La evaluación de las integrales de línea es directa:

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{F}(X, Y, Z) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{x_a}^{x_b} F_x \mathbf{a}_x \cdot dx \mathbf{a}_x + \int_{y_a}^{y_b} F_y \mathbf{a}_y \cdot dy \mathbf{a}_y + \int_{z_a}^{z_b} F_z \mathbf{a}_z \cdot dz \mathbf{a}_z \\ &= \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz \end{aligned}$$

Ecuación A.18a

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{F}(r, \phi, Z) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{r_a}^{r_b} F_r \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r + \int_{\phi_a}^{\phi_b} F_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot r d\phi \mathbf{a}_\phi + \int_{z_a}^{z_b} F_z \mathbf{a}_z \cdot dz \mathbf{a}_z \\ &= \int_{r_a}^{r_b} F_r dr + \int_{\phi_a}^{\phi_b} r F_\phi d\phi + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz \end{aligned}$$

Ecuación A.18b

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{F}(r, \theta, \phi) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{r_a}^{r_b} F_r \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r + \int_{\theta_a}^{\theta_b} F_\theta \mathbf{a}_\theta \cdot r d\theta \mathbf{a}_\theta + \int_{\phi_a}^{\phi_b} F_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot r \text{Sen} \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \\ &= \int_{r_a}^{r_b} F_r dr + \int_{\theta_a}^{\theta_b} r F_\theta d\theta + \int_{\phi_a}^{\phi_b} r \text{Sen} \theta F_\phi d\phi \end{aligned}$$

Ecuación A.18c

Cada una de las integrales requiere integración con respecto a las coordenadas individuales. Por lo tanto, cada componente  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  debe ser

convertida a una función de solamente sus respectivas variables X, Y ó Z.

Si existe un campo escalar (en coordenadas rectangulares, por ejemplo)  $f(X, Y, Z)$  y existe su campo vectorial  $\mathbf{F}$  asociado, obtenido con el gradiente de  $f$ ,  $\mathbf{F} = \nabla f$ , entonces la integral de ruta cerrada de este campo vectorial es cero y se dice que el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es **conservativo**:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0$$

**Ecuación A.19**

La integral de línea de  $\nabla f$ , ecuación A.19, depende únicamente del valor de  $f$  y de los límites de integración, pero no de la ruta seguida:

$$\int_{a,c1}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a,c2}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

**Ecuación A.20**

**Ejemplo sugerido:** calcule la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{F}(X, Y, Z) = (X + Y)\mathbf{a}_x - X\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$  a lo largo de una ruta que consiste en una línea recta desde P1[0, 1, 2] hasta el punto P2[1, 0, 2]. Sugerencia calcule la ecuación de la línea recta para encontrar la relación entre las variables X y Y, de esta manera se podrá realizar la integración de cada componente.

## A.5 La divergencia de un campo vectorial.

Antes de abordar el concepto de divergencia de un campo vectorial es necesario definir el flujo de un campo vectorial a través de una superficie, ya que el concepto de divergente se basa en éste.

**Flujo Eléctrico a Través de una Superficie.** En el estudio de los campos electromagnéticos es muy útil considerar el flujo neto de salida o el flujo de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  a través de una superficie. El flujo de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  a través de una superficie  $S$  (abierta o cerrada) se define como:

$$\psi = \iint_S |\mathbf{F}| \cos \theta dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

**Ecuación A.21**

Donde  $d\mathbf{S}$  es el diferencial de superficie en un punto  $\mathbf{P}$  y  $\theta$  es el ángulo entre el vector  $\mathbf{F}$  y la normal a la superficie,  $\mathbf{S}$  en el mismo punto  $\mathbf{P}$ , es  $\mathbf{a}_n$ . El vector diferencial de superficie  $d\mathbf{S}$  se define como:

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{a}_n$$

**Ecuación A.22**

En la figura A.5 se aprecia la relación que hay entre la superficie  $S$ , el diferencial de superficie  $d\mathbf{S}$ , el punto de interés  $\mathbf{P}$ , el vector  $\mathbf{F}$ , el vector unitario  $\mathbf{a}_n$  y el ángulo  $\theta$ .



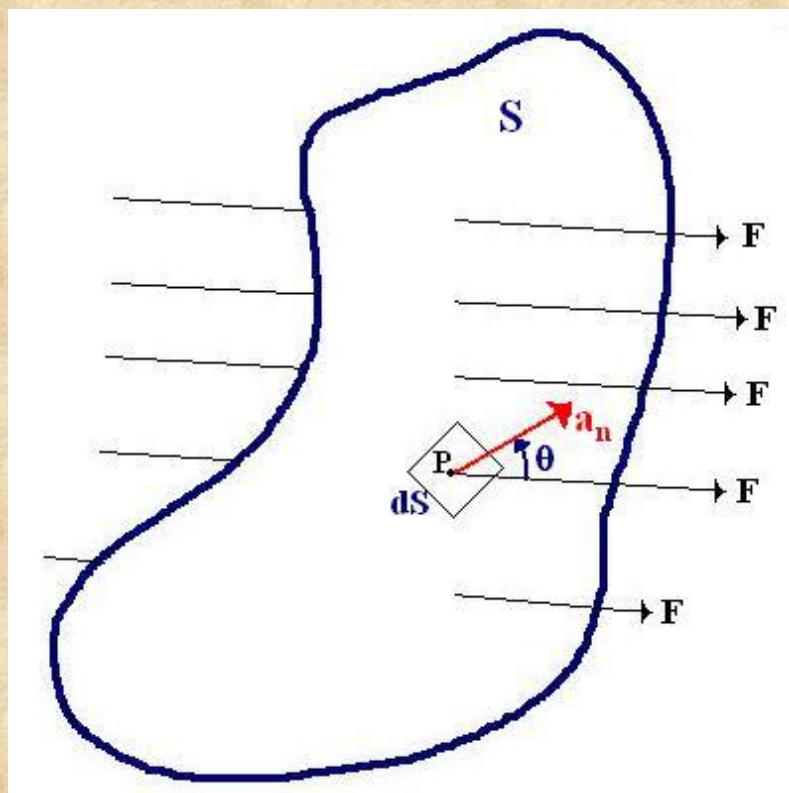


Figura A.5 ilustración del cálculo del flujo que pasa por una superficie.

En la figura A.5, el flujo  $\mathbf{F}$ , el cual NO es perpendicular a  $d\mathbf{S}$ , se puede descomponer en dos componentes (Pitágoras):

La componente de  $\mathbf{F}$  tangencial a  $d\mathbf{S}$ :  $\mathbf{F} \cdot \text{Sen}\theta$

La componente de  $\mathbf{F}$  normal a  $d\mathbf{S}$ :  $\mathbf{F} \cdot \text{Cos}\theta$

Como se puede observar en la figura A.5, la componente que contribuye al flujo por  $d\mathbf{S}$  es la componente normal, la componente tangencial NO contribuye. Hay dos posibilidades para la dirección de  $d\mathbf{S}$  en una superficie abierta, es normal a ésta, pero puede ser en dos direcciones completamente opuestas. Esta ambigüedad se evita cuando se considera una superficie cerrada y se define a  $d\mathbf{S}$  como positiva cuando apunta hacia afuera de la superficie.

$$\psi = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{Ecuación A.23}$$

Divergencia de un campo Vectorial. Se define como "El flujo neto de salida, de la superficie cerrada  $S$  encerrada por el volumen  $V$ , del campo vectorial  $\mathbf{F}$ , por unidad de volumen, conforme el volumen se encoge a cero". Su definición matemática se muestra en la ecuación A.24:

$$\text{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \quad \text{Ecuación A.24}$$

Si se encoge la superficie cerrada  $S$ , haciendo que el volumen  $V$  tienda a cero, entonces en el límite se tendrá una indicación de la presencia de "fuentes" o "sumideros" en algún punto (encerrado por el volumen infinitesimal). Es decir el punto donde se ubican las "fuentes" o "sumideros" queda "al descubierto" al hacer tender el volumen  $V$  a cero. Así pues, la operación de divergente,  $\text{div}\mathbf{F}$ , da la cantidad de líneas de flujo que "divergen" del punto y esto se asocia con la divergencia del campo vectorial  $\mathbf{F}$  en ese punto.

La localización de las líneas de flujo que "divergen" de una superficie cerrada tiene como fin identificar las "fuentes" o los "sumideros" del campo

F. El cálculo del divergente utilizando la definición dada en A.24 no es deseable, pero se puede utilizar una definición matemática alterna, la cual se muestra en la ecuación A.25:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial X} + \frac{\partial F_y}{\partial Y} + \frac{\partial F_z}{\partial Z} \quad \text{Ecuación A.25a}$$

En los otros dos sistemas de coordenadas rectangulares utilizados en este curso:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r, \phi, Z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial Z} \quad \text{Ecuación A.25b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \frac{\partial(\text{Sen} \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad \text{Ecuación A.25c}$$

Nótese que el resultado de la operación divergente  $\text{div} \mathbf{F}$  ó  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  es un campo escalar. En otras palabras, después de realizar la operación divergente se encuentra un campo escalar (al que se le puede denominar  $f$ ) asociado con el campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Ciertas clases de campos vectoriales tienen la propiedad de que su divergencia es cero en todas partes, a estos campos vectoriales se les denomina **solenoidales**.

Las integrales de superficie son difíciles de evaluar, afortunadamente los problemas que se tratan en los campos electromagnéticos son de tal manera que las superficies en las que se requiere integración se adecuan completamente a las superficies utilizadas en los distintos sistemas de coordenadas.

El flujo neto de un campo vectorial que sale de una superficie cerrada  $\mathbf{S}$  nos da una medida de la magnitud de las fuentes o sumideros (Sinks) del campo, las cuales pueden estar contenidas dentro de la misma superficie cerrada  $\mathbf{S}$ . Recuérdese que las líneas de flujo se originan en fuentes y terminan en sumideros.

Al determinar el flujo neto de salida de un vector a través de una superficie cerrada  $\mathbf{S}$ , se ha determinado si dentro de la superficie hay una fuente o sumidero, para esto se consideran las siguientes opciones:

- 1) Si  $\psi$  es positivo, entonces hay una fuente de flujo neto dentro de  $\mathbf{S}$ .
- 2) Si  $\psi$  es negativo, entonces la fuerza del sumidero dentro de  $\mathbf{S}$  es mayor que las fuerzas de las fuentes dentro de  $\mathbf{S}$ .
- 3) Si  $\psi$  es igual a cero, entonces pueden ocurrir dos situaciones **a)** ó no hay fuentes, ni sumideros dentro de  $\mathbf{S}$  ó **b)** la fuerza de las fuentes dentro de  $\mathbf{S}$  es igual a la fuerza de los sumideros.

La magnitud y el signo de  $\psi$  relacionan el flujo de un vector a través de una superficie cerrada con las fuentes o los sumideros de ese campo vectorial dentro del volumen encerrado por la superficie cerrada  $\mathbf{S}$ .

**Ejemplo sugerido:** Para el campo vectorial  $\mathbf{F}(X, Y, Z) = Z\mathbf{a}_y$ . Calcule el flujo neto de  $\mathbf{F}$  que sale de un cilindro de longitud igual a 2 metros, radio = 2 mts. y centrado en el eje  $Z$ , desde  $Z = 0$ , hasta  $Z = 2$ . Sugerencia convierta el campo  $\mathbf{F}$  a coordenadas cilíndricas. Utilizando las ecuaciones para:

### Cambio de variables

#### De Cilíndricas a rectangulares:

$$X = r \cos \phi$$

$$Y = r \sin \phi$$

$$Z = Z$$

Ecuación A.26

De Rectangulares a cilíndricas:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\tan \phi = \frac{Y}{X}$$

$$Z = Z$$

Ecuación A.27

Cambio de componentes Rectangulares a Cilíndricas:

$$A_r = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A_\phi = A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$A_z = A_z$$

Ecuación A.28

## A.6 El teorema de la divergencia.

Al calcular el flujo neto de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  que sale de una superficie cerrada  $\mathbf{S}$ , lo que se hace es simplemente ir sumando las contribuciones infinitesimales de las distintas componentes de  $\mathbf{F}$  que son normales a la superficie cerrada  $\mathbf{F}$  (y que apuntan hacia afuera de  $\mathbf{S}$ ) sobre toda la superficie. Una manera alterna de calcular este flujo neto (que muchas veces simplifica los cálculos) es a través del teorema de la divergencia. El cual indica en su expresión:

"La integral del componente normal de un campo vectorial sobre una superficie cerrada  $\mathbf{S}$  es igual a la integral de la divergencia del campo vectorial a través del volumen  $\mathbf{V}$  encerrado por la superficie  $\mathbf{S}$ "

La expresión matemática de este teorema es:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Ecuación A.29

La importancia de este teorema radica en que permite realizar el mismo cálculo de dos maneras distintas.

**Ejemplo sugerido:** Considere el campo vectorial  $\mathbf{A}(X, Y, Z) = 2XY\mathbf{a}_x - 3Y\mathbf{a}_y + Z^2Y\mathbf{a}_z$ . Suponga que la superficie es un cubo con lados de área unitaria. verifique el teorema de la divergencia para este campo vectorial y esta superficie.

### A.7 El rotacional de un campo vectorial.

En el capítulo anterior se consideró la divergencia de un campo vectorial, la cual nos indica el flujo neto de salida, o el flujo  $\psi$ , del campo  $F$  en una superficie cerrada o un punto. La operación que se va a considerar ahora es **el rotacional**, el cual nos indica la circulación neta de un campo vectorial alrededor de una ruta cerrada o un punto.

Considérese la sección de tubería de la figura A.6, donde la longitud de las flechas es directamente proporcional a la intensidad del flujo. Si el flujo  $F$  es igual en todos los puntos de la tubería, entonces NO hay rotación de la rueda y se dice que: **"El campo vectorial  $F$  NO tiene circulación en el plano paralelo a la tubería (a esta hoja o página)"**.

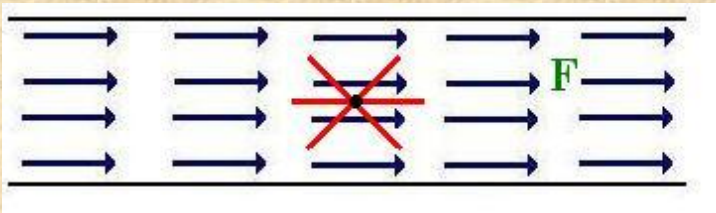


Figura A.6 ilustración del concepto de Rotacional con un campo vectorial  $F$  que NO provoca o no tiene circulación.

En la figura A.7 se observa la misma tubería y la misma rueda, pero en este caso el campo vectorial  $F$  ha cambiado, la intensidad de éste es mayor en la parte superior de la tubería (las flechas tienen una mayor longitud) que en el fondo, esto provoca una rotación neta de la rueda en el sentido de las manecillas del reloj y se dice que: **"El campo vectorial  $F$  tiene una circulación neta en el plano paralelo a la tubería (a esta hoja o página)"**.

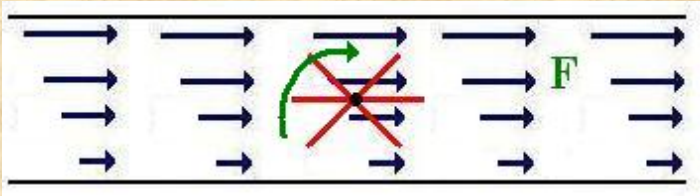


Figura A.7 ilustración del concepto de Rotacional con un campo vectorial  $F$  que tiene circulación en el sentido de las manecillas del reloj.

En la figura A.8 se observa el mismo sistema, pero en este caso el campo vectorial  $F$  tiene una intensidad mayor en el fondo de la tubería (las flechas tienen una mayor longitud) que en la parte superior, esto provoca una rotación neta de la rueda en sentido opuesto a las manecillas del reloj y se dice que: **"El campo vectorial  $F$  tiene una circulación neta en el plano paralelo a la tubería (a esta hoja o página)"**.

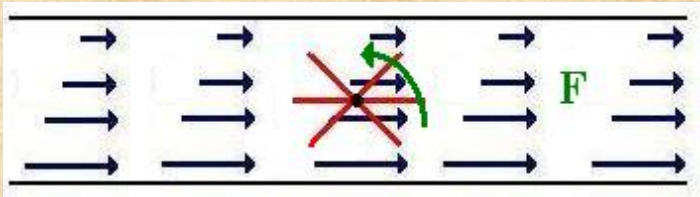


Figura A.8 ilustración del concepto de Rotacional con un campo vectorial  $F$  que tiene circulación en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

La circulación neta de un campo vectorial  $F$  sobre una ruta o contorno cerrado  $C$  se define como: **"La integral de línea de  $F$  a lo largo de  $C$ "**:

$$\text{Circulación} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Ecuación A.30}$$

La circulación en un punto se obtiene al "encoger" el contorno  $C$ , esto lleva a la definición del **Rotacional** (La Circulación) de un campo vectorial, **Curl F**, sobre un punto como: "La circulación de  $F$  por unidad de superficie (la superficie encerrada por  $C$ ), conforme el contorno  $C$  y su superficie se encogen hasta cero":

$$\text{Curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad \text{Ecuación A.31}$$

Esta ecuación nos da el componente del rotacional en dirección de la unidad normal a  $S$ ,  $\mathbf{a}_n$ . La dirección del contorno  $C$  y la unidad normal  $\mathbf{a}_n$  se relacionan por la regla de la mano derecha.

En el ejemplo de la tubería y la rueda, la circulación del fluido se manifiesta como una rotación del eje de la rueda que es perpendicular al plano que contiene a la misma rueda. Este aspecto es tomado en cuenta por la unidad normal a la superficie  $S$ ,  $\mathbf{a}_n$ . Nótese que en este problema de la rueda hay tres orientaciones de la rueda independientes entre sí:

- 1) En el plano mostrado (paralelo al plano de la tubería).
- 2) Perpendicular al plano, con el eje de la rueda alineado con el eje de la tubería, perpendicular a la dirección de  $F$ .
- 3) Perpendicular al plano, con el eje de la rueda perpendicular al eje de la tubería apuntando hacia arriba o hacia abajo.

Cada una de estas tres orientaciones da una medida de la circulación en tres planos distintos y ortogonales entre sí. La circulación neta del campo será el vector resultante de las tres circulaciones. Utilizar la definición matemática dada en la ecuación A.31 no es deseable, es por eso que se presenta una definición alterna para cada sistema de coordenadas:

**En coordenadas Rectangulares:**

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}(X, Y, Z) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial Y} - \frac{\partial A_y}{\partial Z} \right) \mathbf{a}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial Z} - \frac{\partial A_z}{\partial X} \right) \mathbf{a}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial X} - \frac{\partial A_x}{\partial Y} \right) \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.32a}$$

**En coordenadas Cilíndricas:**

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}(r, \phi, Z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial Z} \right) \mathbf{a}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial Z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_z \quad \text{Ecuación A.32b}$$

**En coordenadas Esféricas:**

$$\nabla \times \mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r \text{Sen} \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(F_\phi \text{Sen} \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\text{Sen} \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_\phi \quad \text{Ecuación A.32c}$$

**Ejemplo sugerido:** Para el campo vectorial  $\mathbf{F}(X, Y, Z) = Z\mathbf{a}_y$  calcule la circulación neta de este campo por unidad de superficie.

## A.8 El teorema de Stokes.

la interpretación del rotacional de un vector  $\mathbf{F}$  como: "**La circulación neta por unidad de superficie**" nos lleva al Teorema de Stokes, el cual se define matemáticamente como:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

**Ecuación A.34**

Su expresión en palabras es:

"El flujo neto de  $\nabla \times \mathbf{F}$  sobre alguna superficie abierta  $\mathbf{S}$  es igual a la integral de línea o de ruta cerrada de  $\mathbf{F}$  a lo largo del contorno o ruta cerrada  $\mathbf{C}$  que rodea a la superficie abierta  $\mathbf{S}$ ".

Puesto que  $\mathbf{S}$  es una superficie abierta, hay que ser cuidadoso para definir sin ambigüedades la dirección de  $d\mathbf{S}$ , la cual debe ser normal a la superficie  $\mathbf{S}$ . Esto se resuelve aplicando la regla de la mano derecha, la cual dice:

"Si los dedos de nuestra mano derecha apuntan en dirección del contorno  $\mathbf{C}$ , entonces el dedo pulgar apunta en dirección de  $d\mathbf{S}$ ".

**Ejemplo sugerido:** Para el campo vectorial  $\mathbf{F}(X, Y, Z) = 1\mathbf{a}_x + Z^2Y\mathbf{a}_y$  verifique el teorema de Stokes considerando la superficie plana en  $YZ$ , rodeada por:

$[0, 0, 0]; [0, 1, 0]; [0, 1, 1]; [0, 0, 1]$ . Elija a  $\mathbf{C}$  en el sentido de las manecillas del reloj.

## A.9 El Laplaciano y algunas identidades vectoriales.

Existen dos tipos de Laplaciano, el vector laplaciano y el escalar Laplaciano.

El **vector Laplaciano** para el vector  $\mathbf{F}$ , en coordenadas rectangulares, se define como:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \left( \frac{\partial^2 F_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_X}{\partial Z^2} \right) \mathbf{a}_X + \left( \frac{\partial^2 F_Y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_Y}{\partial Z^2} \right) \mathbf{a}_Y + \left( \frac{\partial^2 F_Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_Z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_Z}{\partial Z^2} \right) \mathbf{a}_Z$$

**Ecuación A.35**

El **escalar Laplaciano**, también conocido como **El Laplaciano**, para el campo escalar  $f$ , en coordenadas rectangulares, se define como:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

**Ecuación A.36a**

Nótese que cada componente del vector laplaciano, ecuación A.35, es un escalar laplaciano.

En los otros dos sistemas de coordenadas rectangulares el laplaciano o laplaciano escalar se define como:

$$\nabla^2 f(r, \phi, Z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

**Ecuación A.36b**

$$\nabla^2 f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{Sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

**Ecuación A.36c**

A continuación y para finalizar esta introducción al Cálculo Vectorial se enlistan algunas identidades vectoriales que pueden ser muy útiles a lo largo del presente curso:

- 1)  $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$  El laplaciano es el divergente del gradiente. **Ecuación A.37a**
- 2)  $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ . **Ecuación A.37b**
- 3)  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$  El rotacional del gradiente de un campo escalar es cero. **Ecuación A.37c**
- 4)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$  La divergencia del rotacional de un campo vectorial es cero. **Ecuación A.37d**
- 5)  $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{F})$  Sin sentido. **Ecuación A.37e**
- 6)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$  **Ecuación A.37f**
- 7)  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F})$  Sin sentido. **Ecuación A.37g**
- 8)  $\nabla(\nabla f)$  Sin sentido. **Ecuación A.37h**
- 9)  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla^2 \mathbf{F} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$  **Ecuación A.37i**
- 10)  $\nabla(\nabla \times \mathbf{F})$  Sin sentido. **Ecuación A.37j**

