# EL POTENCIAL ELÉCTRICO

El campo electrostático es irrotacional ( $\nabla\times\vec{E}=0$ ). Un campo irrotacional proviene de un campo escalar; es el gradiente de un campo escalar. En el caso del campo electrostático, esta función se denomina potencial electrostático ($\vec{E}=-\nabla V$ ). Teniendo en cuenta que la fuerza que actúa sobre una carga puntual $q$ en un campo es $\vec{F}=q\vec{E}$ ,el trabajo que hay que realizar para llevar una carga $q$ desde un punto $P_1$ a otro $P_2$ en contra del campo viene dado por:

$$W=\int_{P_1}^{P_2}-q\vec{E}\cdot d\vec{r}=-q\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{E}=-\nabla V$ , resulta que $dV=-\vec{E}\cdot d\vec{r}$ y por tanto:

$$W=q\int_{P_1}^{P_2}\nabla V\cdot d\vec{r}=q\big(V(P_2)-V(P_1)\big)$$

Según esto, la diferencia de potencial entre un punto $P_2$ y otro $P_1$ es el trabajo que hay que realizar para llevar una carga unidad positiva desde el punto $P_1$ al $P_2$:

$$V(P_2)-V(P_1)=\frac{W}{q}=\int_{P_1}^{P_2}\nabla V\cdot d\vec{r}=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

La unidad de diferencia de potencial en el SI es el voltio. Como la circulación del campo electrostático no depende del camino, si elegimos el potencial en un punto como referencia podremos calcular las diferencias de potencial respecto a él (Figura 1).

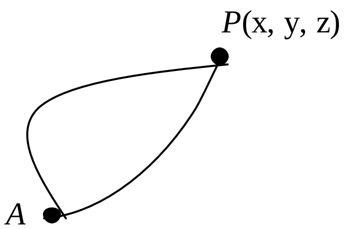


Figura 1

$$V(x,y,z)-V(A)=-\int_{A}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

De este modo podemos calcular los potenciales de cada punto referidos al punto A. En general, cuando tenemos distribuciones de carga finitas, es decir, no hay cargas en el infinito, se le asigna al potencial en el infinito el valor cero, es decir:

$$V(\vec{r})-V_\infty=-\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

y eligiendo $V_\infty = 0$ resulta:

$$V(\vec{r})=-\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Cuando la distribución de carga es finita se puede definir el potencial en un punto como el trabajo que hay que realizar para traer la unidad de carga positiva desde el $\infty$ al punto.

$\vec{E}=-\nabla V$ ; el signo menos se elige por conveniencia ya que:

$$dV=\nabla V\cdot d\vec{r}=|\nabla V||d\vec{r}|\cos a$$

$dV$ es máxima si $\cos\alpha=1$, es decir, si nos movemos en la dirección del gradiente de potencial. $\nabla V$ señala en la dirección de máxima variación de la función. Se elige el signo menos para que el campo señale en la dirección en la que disminuye más rápidamente el potencial.

# POTENCIAL DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

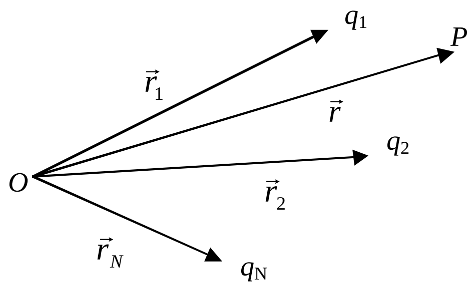
A partir del campo creado por una carga puntual:

$$\vec{E} = K\,\frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$$

obtenemos el potencial debido a una carga puntual:

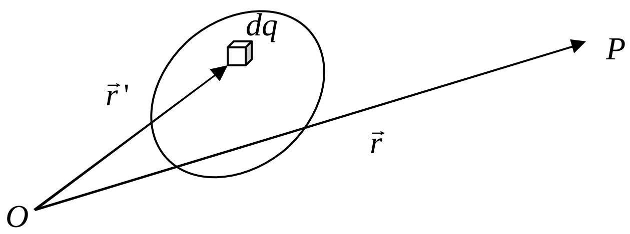
$$V(\vec{r}) - V_\infty = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r K\,\frac{q}{r^2}\,dr = k\,\frac{q}{r}$$

Si tenemos un conjunto de cargas puntuales, el potencial es la superposición de los potenciales debidos a cada carga:




$$V(\vec{r}) = \sum_i K\,\frac{q_i}{/\,\vec{r} - \vec{r}_i\,/}$$

Si tenemos una distribución continua de carga, el potencial será la contribución de infinitos elementos de carga diferenciales:




$$dV = k\,\frac{dq}{/\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,/} = k\,\frac{\rho(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'}{/\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,/}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{/\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,/}\,d^3\vec{r}\,'$$

Esta integral se extiende a todo el recinto en el que se distribuye la carga. Una vez obtenido el potencial se puede deducir el campo eléctrico a partir de $\vec{E} = -\nabla V$ .

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Una superficie equipotencial es el lugar geométrico de puntos que tiene el mismo valor del potencial. Si tenemos una distribución de potencial representada por la función $V(\vec{r}\,)$, la ecuación de las superficies equipotenciales se obtiene a partir de la expresión:

$$V(\vec{r}) = C$$

***Ecuación de las superficies equipotenciales***

***Ejemplo*: Obtener las superficies equipotenciales debidas a una carga puntual**

Teniendo en cuenta que el potencial debido a una carga puntual es $V(\vec{r}) = k\dfrac{q}{r}$, la ecuación de las superficies equipotenciales asociadas a esta distribución viene dada por:

$V(\vec{r}) = k\dfrac{q}{r} = C$ y de aquí $r = \dfrac{kq}{C} = Cte$. Es decir, las superficies equipotenciales son esferas.

*El campo electrostático es perpendicular a las superficies equipotenciales*

En todos los puntos, las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Dado que $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$, si nos movemos a lo largo de una superficie equipotencial tenemos $dV$=0, por tanto $\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$.

***Ejercicio*: Calcular el trabajo necesario para llevar una carga unidad positiva desde un punto $P_1$ a otro $P_2$ a lo largo de una superficie equipotencial ($P_1$ y $P_2$ pertenecen a la misma superficie equipotencial)**

Teniendo en cuenta que el trabajo por unidad de carga necesario para llevar la unidad de carga positiva de un punto a otro es la diferencia de potencial entre los dos puntos resulta: $V(P_1) = V(P_2) \Rightarrow W/q = 0$

## ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE

En una región donde existe una densidad de carga $r$ tenemos (forma diferencial de la ley de Gauss):

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{r}{e_0}$$

También sabemos que $\vec{E} = -\nabla V$, entonces $\nabla\cdot(-\nabla V) = -\nabla\cdot\nabla V = \dfrac{r}{e_0}$. Al operador $\nabla\cdot\nabla$ se le llama *operador de Laplace, laplaciano* o también *nabla cuadrado* y se representa por $\nabla^2$. Teniendo en cuenta esto, nos queda:

$$\nabla^2 V = -\frac{r}{e_0}$$ ***Ecuación de POISSON***

En regiones del espacio en las que no existe densidad de carga ($r$=0) la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$ ***Ecuación de LAPLACE***

La ecuación de Laplace es de gran importancia en Física; la teoría del potencial se reduce en muchos casos a un estudio de las soluciones de esta ecuación sometidas a unas ciertas condiciones de contorno.

### *CONDICIONES DE CONTORNO*

Los problemas vistos hasta ahora no involucraban más de una superficie que separa distintos medios y además hemos estado trabajando en el vacío. En el vacío, la permitividad tiene un valor $e_0$=8.854·10$^{-12}$ F/m. En cualquier otro medio, la permitividad es distinta y la denotaremos por $e$. En su momento veremos que en un medio material en el seno de un campo eléctrico se produce "un reagrupamiento" de las cargas y se define un vector $\vec{D} = e\vec{E}$ (*desplazamiento eléctrico*) cuyas fuentes son las cargas libres, mientras que para el campo eléctrico las fuentes son tanto las cargas libres como las que se inducen por "polarización".

Si el medio es lineal e isótropo la permitividad es constante. La ley de Gauss generalizada en medios materiales es:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

A partir del teorema de Ostrogradsky-Gauss (Teorema de la divergencia) obtenemos:

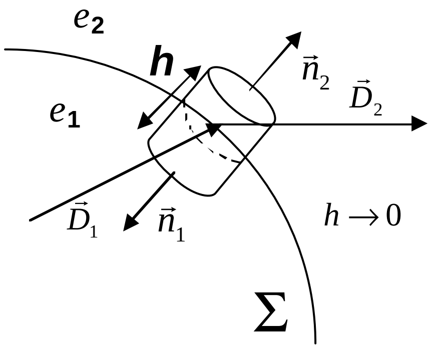
$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{D} dV = \int r dV$$

En el vacío $\vec{D} = e_0 \vec{E}$ y se obtiene la Ley de Gauss como la conocíamos. En un medio lineal e isótropo el problema del potencial consiste en resolver la ecuación de Poisson (o la de Laplace en una región sin cargas) con unas determinadas condiciones de contorno. Las condiciones de contorno son el valor del potencial o de su derivada (los campos) en la frontera que separa los medios.

*Condiciones de frontera para los campos*

*a*.- En la componente normal:

Aplicamos la ley de Gauss generalizada al cilindro de la figura que se encuentra en la interfase de dos medios. Suponemos que en la interfase de los medios hay una densidad superficial de carga libre $s$:




$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_L} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S s dS$$

El flujo del vector desplazamiento eléctrico a través de la superficie lateral es cero ya que la altura del cilindro es prácticamente nula. Por tanto,

$$\int_S \left(\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2\right) dS = \int_S \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} dS = \int_S s\, dS$$

De esta ecuación deducimos las relaciones entre las componentes normales del desplazamiento eléctrico en la interfase de dos medios materiales:

$$D_{2n} - D_{1n} = s$$

Si no hubiera densidad de carga libre en la interfase de los medios (situación muy frecuente), resultaría:

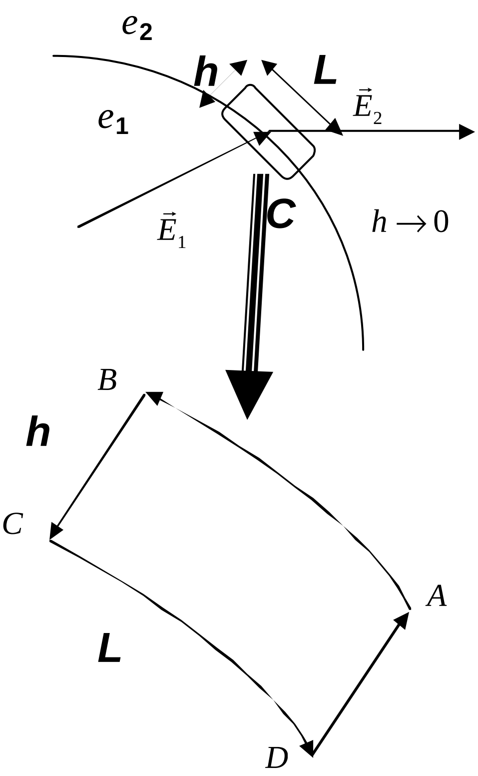
$$D_{2n} = D_{1n}$$

***Continuidad de la componente normal del desplazamiento eléctrico***

Si $e_1$=$e_2$=$e$ resulta $E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{s}{e}$ $\Rightarrow$ *Cuando hay una densidad de carga libre, se presenta una discontinuidad del campo eléctrico normal a interfase.*

*b*.- En la componente tangencial

En la figura, a lo largo de la curva *C*, la circulación del campo eléctrico es nula:




$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

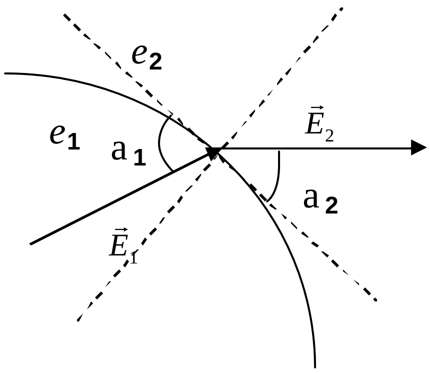
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^L (E_{2t} - E_{1t})\cdot dL = 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t}$$

$$E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

ya que sería válido para cualquier curva. Es decir, *la componente tangencial del campo eléctrico es continua en la interfase de dos medios.*

---

***Ejercicio*: ¿Qué ángulo forman los campos en la interfase de dos medios suponiendo que no hay carga libre en la misma?**




Teniendo en cuenta que si no hay carga en la interfase de dos medios, la componente normal del desplazamiento eléctrico es continua y además que la componente tangencial del campo también lo es obtenemos:

$$\frac{E_{1n}}{E_{1t}} = tga_1 \quad \frac{E_{2n}}{E_{2t}} = tga_2 \Rightarrow \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{tga_2}{tga_1}$$

$$D_{1n} = D_{2n} = e_1 E_{1n} = e_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{tga_1}{tga_2} = \frac{e_2}{e_1}$$

---

Las condiciones de contorno sobre el potencial se deducen a partir de las condiciones de frontera de los campos teniendo en cuenta que:

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_n = -\nabla V\cdot\vec{n} = -\frac{\partial V}{\partial n};\ E_t = -\nabla V\cdot\vec{e}_t = -\frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow D_n = -e\frac{\partial V}{\partial n}$$

La condición de contorno de discontinuidad de la componente normal del *desplazamiento eléctrico* se escribe así:

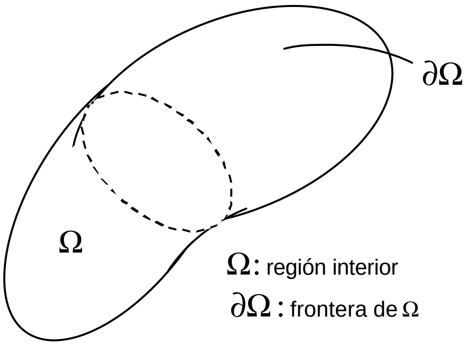
$$e_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - e_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = s$$

La continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico da lugar a:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{\partial V_2}{\partial t} \Rightarrow V_1 = V_2 + C$$

que implica la continuidad del potencial en la interfase de dos medios salvo una constante, que en general se elige igual a cero por conveniencia $V_1 = V_2$ . Es decir, *el potencial es una función continua en la interfase de dos medios.*

La ecuación de Poisson junto con las condiciones de contorno constituye el problema a resolver para encontrar el potencial.




$$\nabla^2 V = -\frac{r}{e}$$

*Condiciones de contorno*:
$V$ en $\partial\Omega$
ó
$\frac{\partial V}{\partial n}$ en $\partial\Omega$

*Este problema tiene solución única* (**Teorema de unicidad**)

*Los valores del potencial o de su derivada normal en la frontera condicionan el valor del potencial en toda la región*

En las regiones en las que no existe densidad de carga, hay que resolver la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno.

*Demostración del teorema de unicidad*

El teorema de unicidad se enuncia así: *La solución de la ecuación de Poisson con unas determinadas condiciones de contorno es única.*

Según el teorema de unicidad podríamos pasar del problema dado a otro más cómodo que diera lugar a la misma solución.

Supongamos que $V_1$ y $V_2$ son soluciones del problema de potencial anterior. Probaremos que $V_1 = V_2$ en toda la región o que $V_1 = V_2 + C$ en caso de que las condiciones de contorno vengan dadas sobre las derivadas normales. Según esto tenemos:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{r}{e}$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{r}{e}$$

*Condiciones de contorno*:
$V_1 = V_2$ en $\partial\Omega$
ó
$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n}$ en $\partial\Omega$

Tomamos $V=V_1 - V_2$. Entonces resulta:

$$\nabla^2 V = 0$$

*Condiciones de contorno*:
$V = 0$ en $\partial\Omega$
ó
$\dfrac{\partial V}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$

Vamos a ver que $V$=0 en toda la región. Aplicamos el teorema de la divergencia a $V\nabla V$ :

$$\int_{Vol} \nabla(V\nabla V)dV = \int_{Vol} (|\nabla V|^2 + V\nabla^2 V)dV = \oint_{\Sigma} V\nabla V \cdot d\vec{S}$$

Dado que $\nabla^2 V = 0$ resulta:

$$\int_{Vol} |\nabla V|^2 \, dV = \oint_{\Sigma} V\nabla V \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2)\left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n}\right) dS$$

Teniendo en cuenta que $V_1$ y $V_2$ satisfacen las mismas condiciones de contorno en la frontera resulta:

$$\int_{Vol} |\nabla V|^2 \, dV = 0 \Leftrightarrow |\nabla V|^2 = 0$$

Entonces $V$=0 en toda la región ó $V$=Cte si las condiciones de contorno son sobre las derivadas normales

## MÉTODOS GENERALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE POTENCIAL

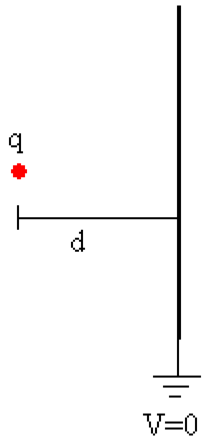
### *Método de las imágenes*

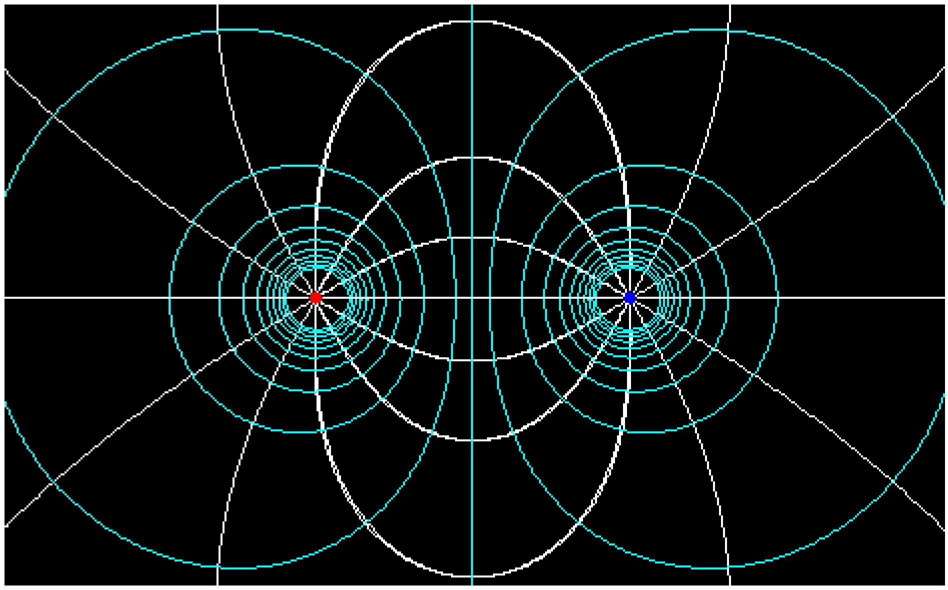
Este método se fundamenta en el teorema de unicidad. Cualquier problema electrostático cuya solución verifique las condiciones de contorno de un problema dado podría sustituirse por este y ambos tendrían la misma solución. En la práctica supone que podemos sustituir un problema dado por otro más fácil de resolver. Este método es especialmente conveniente cuando hay involucradas superficies conductoras.

El método de las imágenes implica la conversión de un campo eléctrico en otro equivalente más fácil de calcular. En ciertos casos es posible sustituir un conductor por una o más cargas puntuales, de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales.

Ver página web
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/imagenes/imagenes.htm

El caso más sencillo es el de una carga $q$ situada a una distancia $d$ de una placa conductora conectada a Tierra. La placa puede reemplazarse por una carga imagen -$q$, tal como se muestra en la figura.



V=0